



TESIS SS14-2501

PEMODELAN *SPATIAL EXTREME VALUE*
DENGAN PENDEKATAN *MAX-STABLE PROCESS*

(Studi Kasus: Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi)

Arief Rachman Hakim
NRP. 1314 201 212

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Sutikno, M.Si
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



TESIS SS14-2501

***SPATIAL EXTREME VALUE MODELING
USING MAX-STABLE PROCESS APPROACH***

(Case Study: Extreme Rainfall Modeling on Ngawi Regency)

Arief Rachman Hakim
NRP. 1314 201 212

SUPERVISOR
Dr. Sutikno, M.Si
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si

PROGRAM OF MAGISTER
DEPARTMENT OF STATISTIC
FACULTY MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

**PEMODELAN SPATIAL EXTREME VALUE DENGAN PENDEKATAN
MAX-STABLE PROCESS**

(Studi Kasus: Pemodelan Curah hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi)

**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)**

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

ARIEF RACHMAN HAKIM

NRP. 1314201212

Tanggal Ujian : 18 Juli 2016

Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :


1. Dr. Sutikno, M.Si

NIP. 19710313 199702 1 001

(Pembimbing I)


2. Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si

NIP. 19831204 200812 1 002

(Pembimbing II)


3. Dr. Purhadi, M.Si

NIP. 19620204 198701 1 001

(Penguji)


4. Irhamah, M.Si, Ph.D

NIP. 19780406 200112 2 002

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana,


Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc. Ph.D.

NIP. 19601202 198701 1 001

**PEMODELAN SPATIAL EXTREME VALUE
DENGAN PENDEKATAN MAX-STABLE PROSES**

(Studi Kasus: Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi)

Nama : Arief Rachman Hakim
NRP : 1314201212
Pembimbing : Dr. Sutikno, M.Si
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si

ABSTRAK

Kejadian ekstrem adalah suatu fenomena berskala pendek yang jarang terjadi dan sulit dihindari, namun memberikan dampak yang cukup besar. Indonesia sebagai daerah tropis ekuatorial mempunyai variasi curah hujan yang cukup besar. *Extreme Value Theory* (EVT) digunakan untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem yang bersifat univariat. *Max-Stable Proses* (MSP) dan *Spatial Extreme value* (SEV) adalah metode untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem pada kasus multivariate dan melibatkan unsur spasial. MSP menggunakan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Estimasi parameter distribusi GEV menggunakan metode *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE). Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan SEV dengan pendekatan MSP pada studi kasus data curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi. Data yang digunakan untuk menyusun model dan estimasi parameter adalah data curah hujan tahun 1991-2011, sedangkan untuk validasi model menggunakan data tahun 2012-2015. Dependensi antar lokasi pengamatan ditunjukkan melalui plot koefisien ekstremal. Nilai koefisien ekstermal berkisar antara 1,3 sampai 1,5, hal ini berarti terdapat dependensi spasial. Validasi model dilakukan dengan mengestimasi *return level* tahun 2012-2015 melalui pendekatan model Smith, Schlather, Brown-Resnick. Hasil validasi, diketahui bahwa model Smith lebih baik daripada model Schlather dan Brown-resnick. Hal ini ditunjukkan oleh nilai RMSE dari *return level* model Smith, Schlather dan Brown-Resnick berturut-turut sebesar 25,317, 29,376, 33,477.

Kata kunci : *Spatial extreme value, Max-Stable process, Smith, Schlather, Brown-Resnick, return level*

**SPATIAL EXTREME VALUE MODELING
USING MAX-STABLE PROCESSES APPROACH
(Case Study: Extreme Rainfall Modeling on Ngawi Regency)**

Student Name : Arief Rachman Hakim

NRP : 1314201212

Supervisor : Dr. Sutikno, M.Si

Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si

ABSTRACT

Extreme events is a short scale phenomena that are rare and hard to avoid, but it gives a considerable impact. Indonesia as the equatorial tropical areas have rainfall variability is large enough. One attempt to minimize the impact of extreme rainfall loss was to determine the patterns and characteristics of extreme rainfall events, so early anticipation can be done. Extreme Value Theory (EVT) used to identify extreme events that are univariate. *Max-Stable Process* and *spatial extreme value* are statistical methods for analyzing extreme events on multivariate case and involve spatial element. The approach used in *Max-Stable Process* is *Generalized Extreme Value* (GEV) distribution. Estimate parameters of GEV distribution using *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE) method. This study aims to modeling spatial extreme using *Max-Stable Process* on case studies of extreme rainfall in Ngawi Regency. The data used to construct the model and parameter estimation is the rainfall data of 1991-2011, and for the validation of the model using the data of 2012-2015. The dependencies of rainfall intensities across location were indicated by extremal coefficient plot. The resulting extremal coefficient value is in the range of 1,3 to 1,5, it means there is a spatial dependencies. Model validation is done by estimating the return level in 2012-2015 by Smith model, Schlather model, Brown-Resnick model approach. The Results validation Smith is known that the model is better than the other two models for prediction of return level using RMSE. RMSE value Smith model is 25,317, Schlather model is 29,3761 and Brown-Resnick model is 33,477.

Key Words : *Spatial extreme value, Max-Stable process, Smith, Schlather, Brown-Resnick, return level.*

KATA PENGANTAR

Allhamdulillah. Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmatNya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis dengan judul “**Pemodelan *Spatial Extreme Value* Dengan Pendekatan *Max-Stable Proses* (Studi Kasus : Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi)**”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) di Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dengan selesainya tesis ini, tentunya tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Allah SWT atas semua kebaikan, anugerah dan curahan kasih sayang yang sangat luar biasa yang telah diberikan.
2. Bapak Dr. Sutikno, S.Si., M.Si. dan Bapak Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si. selaku dosen pembimbing, yang telah banyak memberikan bimbingan, bantuan, masukan dan semangat.
3. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc. dan Ibu Irhamah, M.Si, Ph.D selaku dosen penguji Tugas Akhir, atas segala saran dan masukan yang telah diberikan.
4. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
5. Ibu Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si. selaku dosen wali atas segala saran yang diberikan
6. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Statistika FMIPA ITS, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan.
7. Ayah dan Ibu tercinta, Waluyo Sujito, S.Pd dan Budiah atas segala doa, motivasi dan dukungan moral maupun moril.
8. Rekan-rekan seperjuangan Program Magister Jurusan Statistika angkatan 2014 genap, atas kerjasama, saran serta teman belajar / diskusi.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran maupun kritik yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan dan kesempurnaan karya ini. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua. Aamiin Yaa Rabbal'alam

Surabaya, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR GAMBAR.....	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
 BAB I PENDAHULUAN.....	 1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	4
1.5 Batasan Masalah	4
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 5
2.1 Extreme Value Theory (EVT)	5
2.2 Metode Block Maxima (BM)	5
2.2.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV Univariat	8
2.2.1 Uji Kecocokan Distribusi	11
2.3 Spatial Extreme Modeling	12
2.3.1 Madogram	13

2.3.2	Max Stable Process (MSP)	15
2.3.3	Model Smith	17
2.3.4	Model Schlather	18
2.3.5	Model Brown Resnick	21
2.4	Estimasi Parameter dengan <i>Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE)</i>	21
2.5	Koefisien Ekstremal	23
2.6	Pemilihan Model Terbaik	24
2.7	Return Level	25
2.8	Root Mean Square Error (RMSE)	26
2.9	Skewness dan Kurtosis	26
2.10	Curah Hujan dan Curah Hujan Ekstrem	27
2.11	Zona Musim	28
BAB III METODOLOGI PENELITIAN		31
3.1	Sumber Data dan Variabel Penelitian	31
3.2	Tahapan Penelitian	32
3.3	Diagram Alir	36
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		37
4.1	Prosedur Pemprosesan Dengan Max-Stable Proses	37
4.2	Penyusunan Model Max-Stable Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi	41
4.2.1	Deskripsi Curah Hujan di Kabupaten Ngawi	42
4.2.2	Identifikasi Perilaku Ekor (<i>Heavy Tail</i>)	45
4.2.3	Identifikasi Ekstrem Dengan Block Maxima	46

4.2.4 Dugaan Nilai Parameter GEV Univariat	47
4.2.5 Uji Kesuaian Distribusi	48
4.2.6 Transformasi ke Margin Frechet	50
4.2.7 Dependensi Spasial dan Koefisien Eksternal Curah Hujan Ekstrim	51
4.2.8 Estimasi Parameter GEV Spasial	53
4.2.9 Estimasi Parameter Spatial Extreme Value dengan Max-stable Proses	54
4.2.10 Return Level model Smith, Schlater, Brown resnick.....	57
4.2.11 Tingkat Kesalahan Ramalan.....	59
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran	63
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN.....	69

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Nama Stasiun / Pos Pengamatan Curah Hujan Kabupaten Ngawi	31
Tabel 3.2 Struktur Data Training.....	31
Tabel 4.1 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum, Nilai Maksimum, Skewness dan Kurtosis Curah Hujan (mm/hari)	42
Tabel 4.2 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum dan Nilai Maksimum Sampel Ekstrim (mm)	47
Tabel 4.3 Nilai Parameter $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, dan $\hat{\xi}$ GEV univariat.....	48
Tabel 4.4 Uji Anderson Darling	50
Tabel 4.5 Hasil Transformasi Pos Gemarang.....	51
Tabel 4.6 Model <i>Trend Surface</i> Terbaik	53
Tabel 4.7 Estimasi Parameter Model Smith.....	55
Tabel 4.8 Parameter Dependensi Model Schlather.....	56
Tabel 4.9 Estimasi Parameter Model Schlather	56
Tabel 4.10 Estimasi Parameter Model Brown Resnick.....	57
Tabel 4.11 Return Level Model Smith	58
Tabel 4.12 Return Level Model Schlather.....	58
Tabel 4.13 Return Level Model Brown Resnick	58
Tabel 4.14 Prediksi Return Level periode ulang 4 tahun dan Nilai Kesalahan Ramalan.....	60
Tabel 4.15 Return Level model Smith, Schlather, dan Brown-resnick dan peluang terlampai periode ulang 4 tahun (T=16).	60

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Block Maxima (Gilli dan Kellezi, 2006)	6
Gambar 2.2 Bentuk PDF tipe distribusi GEV	8
Gambar 2.3 Ilustrasi Pengamatan data Spasial	12
Gambar 2.4 Ilustrasi Plot Semivariogram	14
Gambar 2.5 Ilustrasi Return Level (Mallor, Nualart, Omey, 2009)	25
Gambar 2.6 Pembagian Zona Musim (ZOM) di Provinsi Jawa Timur	29
Gambar 3.1 Peta Pos Hujan Kabupaten Ngawi	32
Gambar 4.1 Histogram curah hujan pos Mardiasri berdasarkan harian	43
Gambar 4.2 Rata-rata Curah Hujan Harian Menurut Bulan dan Lokasi	44
Gambar 4.3 Histogram curah hujan pos Banyubiru	45
Gambar 4.4 Histogram Curah Hujan Seluruh Pos Pemantau Hujan Kabupaten Ngawi.....	46
Gambar 4.5 Probability Plot Pos Walikukun	48
Gambar 4.6 Probability Plot seluruh pos pemantau hujan Kabupaten Ngawi	49
Gambar 4.7 Estimasi Koefisien Eksternal Model Smith dan Schlather	51
Gambar 4.8 Estimasi Madogram Pos Curah Hujan di KabupatenNgawi	52
Gambar 4.9 F-Madogram Pos Curah Hujan di Kabupaten Ngawi.....	52

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Data Curah Hujan Harian (mm) Kabupaten Ngawi Tahun 1991-2011	69
Lampiran 2. Data Curah Hujan Ekstrem (mm) Periode Tiga Bulan Kabupaten Ngawi Tahun 1991-2011	71
Lampiran 3 Histogram Curah Hujan Berdasarkan Hari Sembilan Pos Pemantau Hujan di Kabupaten Ngawi.....	76
Lampiran 4 Tabel Anderson Darling A_{tabel}^2	77
Lampiran 5 Hasil Transformasi Sampel Ekstrem Ke Margin Frechet.....	78
Lampiran 6 Output Estimasi Parameter GEV Univariat	80
Lampiran 7 <i>Syntax</i> Program R Estimasi Parameter GEV Spasial.....	85
Lampiran 8 Jarak <i>Euclid</i> dan Koefisien Ekstremal	91

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kejadian ekstrem maupun iklim ekstrem adalah suatu fenomena berskala pendek yang jarang terjadi dan biasanya jarang dapat dihindari, namun memberikan dampak yang cukup serius dari berbagai aspek kehidupan. Beberapa contoh diantaranya adalah temperatur yang tinggi berdampak pada meningkatnya konsumsi energi, pertanian dan kesehatan masyarakat. Contoh lain kejadian ekstrem yang terjadi di beberapa negara berupa gelombang panas, banjir, angin topan, salju ekstrem serta curah hujan yang tinggi.

Indonesia merupakan negara yang memiliki curah hujan tinggi sehingga mengakibatkan banjir dan gagal panen. Bencana banjir dan tanah longsor yang terjadi di beberapa wilayah di Indonesia merupakan akibat dari curah hujan ekstrem. Oleh karena itu salah satu upaya untuk meminimalkan dampak kerugian curah hujan ekstrem adalah dengan mengetahui pola dan karakteristik kejadian curah hujan ekstrem, sehingga antisipasi dini dapat dilakukan.

Beberapa penelitian dilakukan untuk memprediksi curah hujan ekstrem khususnya di Indonesia di antaranya oleh Malika (2015) dan Anifah (2014). Dalam penelitian tersebut, terdapat dua pendekatan yang digunakan untuk menentukan nilai ekstrem, yaitu *Block Maxima* (BM) dan *Peaks Over Threshold* (POT). Pendekatan BM menghasilkan distribusi nilai ekstrem berupa distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Metode pendugaan parameter distribusi GEV diantaranya *Maksimum Likelihood* (ML) dan *Least Square* (LS). Penelitian tersebut juga membahas adanya kasus dependensi antar amatan data ekstrem yang sering disebut data ekstrem stokastik.

Extreme Value Theory (EVT) merupakan salah satu metode statistika untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem. EVT dikembangkan dari kasus univariat dengan kejadian ekstrem pada satu variabel dan sering diaplikasikan pada data saham. Untuk data-data curah hujan, salju, debit sungai, suhu, panas atau temperature termasuk sebagai data spasial yang merupakan data multivariat

karena diamati pada beberapa lokasi, maka dari itu dikembangkan metode *Spatial Extreme Value* (SEV).

Terdapat beberapa metode untuk menganalisis kejadian ekstrem dengan SEV, diantaranya adalah pendekatan copula yang dilakukan oleh Davison, Padoan, dan Ribatet (2012). Kemudian Cooley, Nychka, dan Naveau (2007) meneliti tentang presipitasi ekstrem spasial di Colorado dengan pendekatan *hierarchical Bayesian*. Selain itu, terdapat metode *Max Stable Process* (MSP) yang dikembangkan oleh de Haan (1984) dan dikembangkan oleh beberapa peneliti lain seperti Schlather (2002), Kabluchko, Schlather, dan de Haan (2009). Aplikasi metode max-stable pada data curah hujan dapat ditemukan pada penelitian yang dilakukan oleh Buishand, de Haan, dan Zhou (2008), Smith dan Stephenson (2009), dan Davison dan Gholamrezaee (2010) pada data temperatur. MSP merupakan perluasan dari distribusi ekstrem multivariat ke dimensi tak hingga (*infinite dimensional*). Metode ini berfungsi untuk memodelkan dependensi spasial dengan mentransformasikan distribusi marginal nilai ekstrem ke dalam distribusi Frechet yang merupakan salah satu tipe dari distribusi GEV.

Davison, Padoan, Ribatet (2012) melakukan perbandingan beberapa metode untuk pemodelan spasial curah hujan ekstrem, yaitu metode copula, bayesian hirarki, dan *max-stable*. Kesimpulan penelitian tersebut menunjukkan bahwa kinerja model MSP lebih baik dari pada metode copula dan bayesian hirarki. Pemodelan dengan MSP memiliki kelebihan dalam mengukur dependensi spasial ekstrem yang konsisten dengan teori *extreme value* klasik (Blanchet dan Davison, 2011).

MSP memiliki beberapa model yang sering digunakan antara lain model *Smith* yang dipelopori oleh Smith (1990) dan diaplikasikan pada data curah hujan di Inggris, *model Schlather* dikemukakan oleh Schlather (2002) yang mengembangkan pemodelan SEV melalui pendekatan MSP berdasarkan Gaussian random field, model *Brown-Resnick* yang ditulis oleh Kabluchko (2009) dengan menerapkan *Brown-Resnick Process* (Brown dan Resnick, 1977) pada MSP dimana fungsi dependensinya menggunakan fungsi semivariogram. Perbedaan dari model-model tersebut ada pada jangkauan nilai koefisien eksternal atau kemampuan menangkap dependensi spasial. Metode estimasi parameter yang

digunakan pada MSP adalah *Composite Likelihood Estimation* dengan fungsi *pairwise likelihood* (Padoan, Ribatet, dan Sisson, 2010). Penelitian terbaru di Indonesia yang membahas model model tersebut diantaranya Ramadhani (2015) yang membahas model ekstrem value dengan maxstable proses model Smith dan Brown-Resnick, Malika (2015) membahas model Schlather, serta Anindita (2015) yang membahas model Smith. Ketiga penelitian tersebut menggunakan kasus data curah hujan di kabupaten Lamongan.

Penelitian ini melanjutkan tiga penelitian sebelumnya dengan studi kasus pemodelan curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi, Jawa Timur. Jawa Timur merupakan salah satu daerah yang cukup besar menyumbang produksi padi nasional sebesar 12,4 juta ton Gabah Kering Giling (GKG) atau sekitar 17.5 % dari total produksi nasional sebanyak 70,85 juta ton. Pada tahun 2014 Ngawi merupakan salah satu daerah penghasil padi di Jawa Timur dengan produksi padi sebesar 776.937 ton, dengan luas lahan panen 120.929 ha (BPS,2015). Berdasarkan catatan Badan Penanggulangan Bencana Daerah (BPBD) dalam Radar Madiun (2016), Ngawi merupakan daerah yang rawan banjir, sehingga apabila terjadi hujan ekstrem yang berkesinambungan tentu saja berpengaruh terhadap hasil panen atau produktivitas padi. Untuk itu dilakukan kajian di daerah Ngawi guna untuk mengetahui pola perilaku kejadian ekstrem. Pada penelitian ini akan dilakukan pemodelan SEV dengan pendekatan MSP. Model yang akan digunakan adalah model Smith, Schalater dan Brown-resnick. Salah satu yang terpenting dalam kajian EVT yaitu menentukan *return level*, yang merupakan nilai ambang maksimum curah hujan yang diharapkan dilampaui satu kali dalam periode waktu ulang tertentu. *return level* dapat digunakan sebagai informasi sehingga dampak dampak yang disebabkan oleh iklim ekstrem dapat di minimalisir.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, penelitian ini ingin mengetahui bagaimana prosedur pemodelan SEV dengan pendekatan MSP, model curah hujan ekstrem serta menghitung *return level* curah hujan di Kabupaten Ngawi.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui dan membuat kajian langkah-langkah pengerjaan dari SEV dengan pendekatan MSP.
2. Mendapatkan model curah hujan ekstrem dan prediksi *return level* curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi menggunakan metode SEV dengan pendekatan MSP.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini adalah penerapan metode Statistika untuk menjelaskan kejadian ekstrem, sehingga dapat dijadikan pengetahuan dalam mengidentifikasi kejadian ekstrem di bidang klimatologi. Selain itu diharapkan hasil penelitian dapat dimanfaatkan oleh Badan Meteorologi, Klimatologi dan Geofisika (BMKG) dalam pengembangan prediksi iklim sehingga dapat dimanfaatkan sebagai antisipasi dini terjadinya bencana alam akibat curah hujan ekstrem.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini dibatasi pada beberapa hal, yaitu :

1. Model MSP yang digunakan dalam penelitian ini adalah model Smith, Schlather dan Brown-Resnick.
2. Metode pengambilan nilai ekstrem yang digunakan dalam penelitian ini adalah BM karena terdapat unsur seasonal dalam data curah hujan di Kabupaten Ngawi.
3. Data pada penelitian ini diasumsikan stasioner secara spasial dan isotropik.
4. Data yang digunakan adalah data curah hujan harian pada sepuluh pos curah hujan di Kabupaten Ngawi tahun 1991-2015.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar *Extreme Value Theory*

Extreme Value Theory (EVT) merupakan sebuah metode statistika yang digunakan untuk mempelajari pola atau perilaku ekor (tail) dari sebuah distribusi random. Metode ini biasanya digunakan untuk menganalisis suatu kejadian yang bersifat extreme, dimana kejadian ini jarang terjadi dan berlangsung dalam waktu singkat namun dampak yang diberikan cukup memberikan kerugian yang besar. EVT sendiri sudah lama dikembangkan untuk kasus univariate pada variabel tunggal. Pengaplikasian EVT sendiri sudah dimulai lebih dari 50 tahun yang lalu (Coles, 2001) dalam berbagai bidang seperti hidrologi, klimatologi, dan teori reliabilitas.

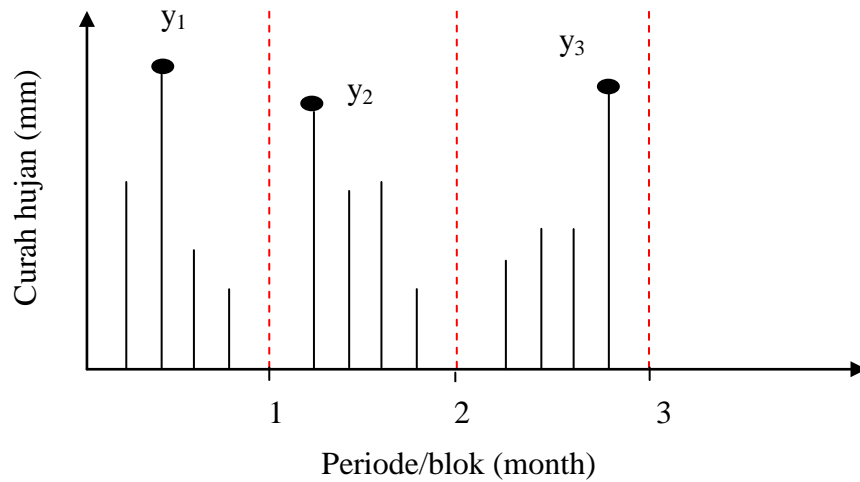
Kajian mengenai ekor distribusi menunjukkan bahwa sebagian besar data iklim memiliki ekor distribusi yang heavy-tail, yaitu ekor distribusi turun secara lambat bila dibandingkan dengan distribusi normal. Dampaknya adalah peluang terjadinya nilai ekstrem akan lebih besar daripada distribusi normal. EVT dapat meramalkan terjadinya kejadian ekstrem pada data heavy-tail yang tidak dapat dilakukan dengan pendekatan standar (konvensional). Konsep dasar dari EVT adalah mengkaji perilaku stokastik dari variabel random baik maksimum maupun minimum (Kotz dan Nadarajah, 2000). Tujuan metode ini adalah untuk menentukan estimasi peluang kejadian ekstrem dengan memperhatikan ekor (tail) dari fungsi distribusi berdasarkan nilai-nilai ekstrem yang diperoleh.

Dalam mengidentifikasi nilai ekstrem terdapat dua pendekatan. Pendekatan pertama adalah metode BM, yaitu mengambil nilai maksimum dalam satu periode yang disebut sebagai blok. Pendekatan kedua adalah metode POT, yaitu mengambil nilai yang melewati suatu nilai threshold (McNeil, 1999; Gilli dan Kellezi, 2006).

2.2 Metode *Block Maxima*

Salah satu metode dalam mengidentifikasi nilai ekstrem adalah BM, yang mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan nilai maksimum data pengamatan yang dikelompokkan berdasarkan periode tertentu yang disebut blok. Pada metode

ini, data pengamatan dibagi dalam blok-blok pada periode waktu tertentu, misal bulan, triwulan, semester, atau tahun, kemudian untuk setiap blok ditentukan besarnya data pengamatan maksimum dan nilai tersebut adalah nilai ekstrem untuk setiap blok dan digunakan sebagai sampel pada metode BM. Gambar 2.1 berikut menunjukkan ilustrasi pengambilan sampel dengan metode BM, dimana diamati data curah hujan mulai bulan (periode) pertama sampai keempat. Nilai maksimum pada periode pertama (blok pertama) yang akan digunakan sebagai sampel ekstrem adalah y_1 , dimana y_1 terletak pada data dimana observasi kedua (X_2), periode kedua (blok kedua) yang akan digunakan sebagai sampel ekstrem adalah y_2 , dimana y_2 terletak pada data dimana observasi pertama (X_1), dan untuk bulan berikutnya pengambilan sampel dilakukan dengan cara yang sama seperti bulan sebelumnya.



Gambar 2.1 Block Maxima (Gilli dan Kellezi, 2006)

Menurut Gilli dan Kellezi (2006), metode block maxima mengaplikasikan teorema Fisher-Tippett Gnedenko (1928) bahwa data sampel nilai ekstrem yang diambil dari metode block maxima akan mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) yang memiliki *Cumulative Distribution Function* (CDF) seperti persamaan (2.1) sebagai berikut :

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, & -\infty < y < \infty, \xi \neq 0, 1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) > 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & -\infty < y < \infty, \xi = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan

y adalah nilai ekstrem yang di peroleh dari block maxima

μ adalah parameter lokasi (location) dengan $-\infty < \mu < \infty$

σ adalah parameter skala (scale) dengan $\sigma > 0$

ξ adalah parameter bentuk (shape)

Probability density function (pdf) untuk distribusi GEV seperti pada persamaan (2.2)

$$f(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \xi = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

parameter ξ pada persamaan (2.2) menunjukkan perilaku ekor (tail) pada distribusi GEV. Tipe distribusi GEV ada 3 macam yaitu distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang memiliki CDF seperti disajikan pada persamaan (2.3)-(2.5)

a. Distribusi Gumbel (distribusi *extreme value* tipe I) untuk $\xi = 0$

$$F(y; \mu, \sigma) = \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, -\infty < y < \infty \quad (2.3)$$

b. Distribusi Freechet (distribusi *extreme value* tipe II) untuk $\xi > 0$

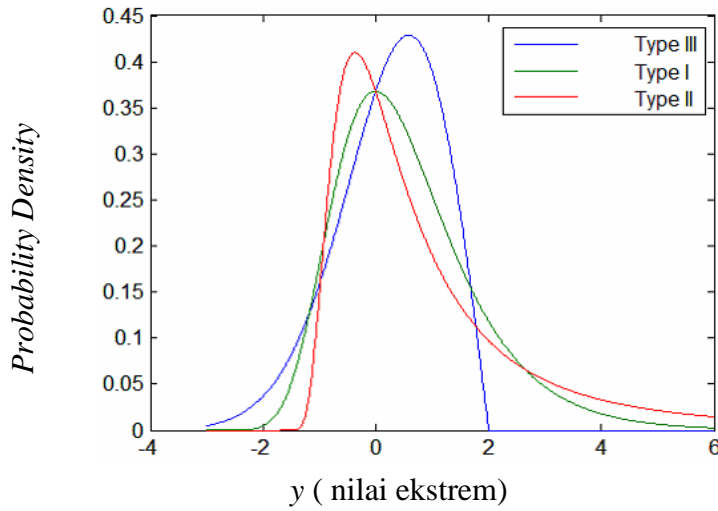
$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 0 & , y \leq \mu \\ \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right\} & , y > \mu \end{cases} \quad (2.4)$$

c. Distribusi Weibull (distribusi *extreme value* tipe III) untuk $\xi < 0$

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{1/\xi} \right\} & , y < \mu \\ 1 & , y \geq \mu \end{cases} \quad (2.5)$$

Parameter ξ merupakan parameter bentuk ekor (*tail*) dari distribusi. Semakin besar nilai ξ , maka distribusinya memiliki ekor yang semakin berat (*heavy tail*) yang menunjukkan bahwa peluang terjadinya nilai ekstrem semakin besar. Menurut Finkenstadt dan Rootzen (2004) untuk parameter bentuk dengan $\xi = 0$ dikatakan “*medium tail*” ada juga menyebutnya “*exponensial tail*”, untuk $\xi > 0$ dikatakan “*long tail*” dan untuk $\xi < 0$ dikatakan “*short tail*”. Tipe distribusi di

atas menunjukkan bahwa distribusi yang memiliki ekor paling heavy tail ialah distribusi Frechet ($\xi > 0$).



Gambar 2.2 Bentuk PDF tipe distribusi GEV

Gambar 2.2 menunjukkan bentuk PDF dari 3 Tipe distribusi GEV yaitu distribusi Gumbel(type I), Frechet(type II), dan Weibull(type III) (Mallor, Nualart, Omey, 2009).

2.2.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV Univariat

Estimasi parameter distribusi GEV dapat dilakukan dengan beberapa cara salah satunya adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berikut adalah estimasi parameter untuk parameter $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ dengan MLE :

dengan menggunakan pdf dari distribusi GEV

$$f(y_i; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left(- \frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \xi = 0 \end{cases}$$

maka untuk fungsi likelihood dengan $\xi \neq 0$ adalah:

$$\begin{aligned}
L(\mu, \sigma, \xi | y_1 y_2 \dots y_n) &= \prod_{i=1}^n f(y_i; \mu, \sigma, \xi) \\
L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right\} \\
L(\mu, \sigma, \xi) &= \left(\frac{1}{\sigma} \right)^n \left[\sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \\
L(\mu, \sigma, \xi) &= (\sigma)^{-n} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Selanjutnya adalah memaksimumkan fungsi likelihood. Agar lebih mudah pertama membuat \ln dari persamaan (2.6), Kedua membuat turunan pertama dari persamaan (2.7) lalu disama dengankan 0 seperti pada persamaan 2.8 - 2.10.

$$\begin{aligned}
\ln(L(\mu, \sigma, \xi)) &= \ln \left((\sigma)^{-n} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \right) \\
&= -n \ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma, \xi))}{\partial \mu} = \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-1} - \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma, \xi))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-1} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} = 0 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma, \xi))}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} - \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \left(1 + \xi \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] = 0 \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Dari persamaan hasil turunan pertama (2.8), (2.9) dan (2.10) dari fungsi likelihood tidak closed form, maka diperlukan pendekatan secara numerik. Metode numerik yang digunakan adalah Nelder-Mead. Fungsi \ln likelihood pada persamaan 2.7 dapat dituliskan $\ln(L(\mu, \sigma, \xi)) = \ell(\psi)$ dimana $\psi = \{\mu, \sigma, \xi\}$.

Prosedur metode Nelder-Mead untuk memaksimumkan fungsi \ln *likelihood* $\ell(\psi)$ dimana $\ell \in R^3$, maka *initial point* yang digunakan yaitu ada sebanyak $3+1=4$ yaitu ψ_1, \dots, ψ_4 . Langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Substitusi nilai ψ_1, \dots, ψ_4 kedalam fungsi $\ell(\psi)$, kemudian diurutkan mulai nilai terbesar sampai terkecil $\ell(\psi_1) \geq \ell(\psi_2) \geq \dots \geq \ell(\psi_4)$ sehingga ψ_1 disebut titik terbaik (best) dan ψ_4 disebut titik terburuk.
2. Menentukan nilai ψ_0 , yaitu nilai centroid pada setiap initial point kecuali ψ_4 .
3. Tahap Reflection
 - Menentukan titik refleksi ψ_r dengan rumus $\psi_r = \psi_0 + a(\psi_0 - \psi_4)$, kemudian substitusi nilai ψ_r ke dalam fungsi $\ell(\psi)$ sehingga ada tiga kemungkinan kondisi yang dicapai oleh $\ell(\psi_r)$.
 - Kondisi 1: jika ψ_r memenuhi kondisi $\ell(\psi_1) \geq \ell(\psi_r) \geq \ell(\psi_m)$, maka $\psi_4 = \psi_r$ dan kembali kelangkah 1.
4. Tahap Expansion
 - Kondisi 2 : jika ψ_r memenuhi kondisi $\ell(\psi_r) \geq \ell(\psi_1)$ maka menentukan titik ekspansi ψ_c dengan rumus $\psi_c = \psi_0 + b(\psi_0 - \psi_4)$, kemudian substitusi nilai ψ_c kedalam fungsi $\ell(\psi_r)$.
 - Selanjutnya nilai ψ_c memenuhi kondisi $\ell(\psi_c) \geq \ell(\psi_1)$, maka $\psi_4 = \psi_c$ dan kembali kelangkah 1. Sedangkan jika titik ψ_c tidak memenuhi kondisi tersebut, maka $\psi_4 = \psi_r$, dan kembali ke langkah 1.
5. Tahap Contraction
 - Kondisi 3: jika ψ_r memenuhi kondisi $\ell(\psi_r) \geq \ell(\psi_3)$ maka menentukan titik kontraksi ψ_c dengan rumus $\psi_c = \psi_0 + c(\psi_0 - \psi_4)$, kemudian substitusikan nilai ψ_c kedalam fungsi $\ell(\psi)$.
 - Jika titik ψ_c memenuhi kondisi $\ell(\psi_c) \geq \ell(\psi_4)$, maka $\psi_4 = \psi_c$ dan kembali kelangkah 1.

6. Tahap Reduction

Pada tahap ini jika ψ_r tidak memenuhi salah satu dari tiga kondisi tersebut, maka untuk setiap titik (kecuali titik terbaik ψ_1) diganti menggunakan rumus : $\psi_i = \psi_1 + d(\psi_i - \psi_1)$ dimana $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dengan a,b,c dan d adalah koefisien reflection, expansion, contraction dan shrink dengan domain $a > 0$, $b > 1$, $0 < c < 1$, dan $0 < d < 1$. Nilai standar digunakan untuk koefisien-koefisien tersebut yaitu $a = 1$, $b = 2$, $c = -\frac{1}{2}$ dan $d = \frac{1}{2}$ (Nelder dan Mead, 1965).

2.2.2 Uji Kecocokan Distribusi

Pemeriksaan kesesuaian distribusi dilakukan untuk menunjukkan adanya kesesuaian distribusi teoritis dengan distribusi empiris. Jika distribusi yang terbentuk sudah sesuai maka dapat digunakan untuk menentukan return level pada periode ulang waktu tertentu. Pemeriksaan distribusi dapat dilakukan melalui dua cara yaitu dengan *Quantile Plot* dan *Probability Plot* atau dengan pengujian Anderson Darling. Metode Anderson Darling digunakan untuk menguji apakah sampel berasal dari distribusi tertentu. Pada metode ini titik kritis di hitung berdasarkan distribusi tertentu pada Hipotesis nol dan mengukur penyimpangan ekor(tail) dari empirical distribution function (EDF) terhadap cumulative distribution function (CDF).

Hipotesis yang diuji:

$H_0 : F(y) = F_0(y)$ (Distribusi dari sampel mengikuti distribusi teoritis $F_0(y)$)

$H_1 : F(y) \neq F_0(y)$ (Distribusi dari sampel tidak mengikuti distribusi teoritis $F_0(y)$)

Statistik uji menurut (Shin, Jung, Jeong dan Heo, 2011) :

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\log F_0(y_i) + \log \{1 - F_0(y_{n+1-i})\} \right], \quad (2.11)$$

dengan:

$F_0(y_i)$: CDF dari distribusi teoritis.

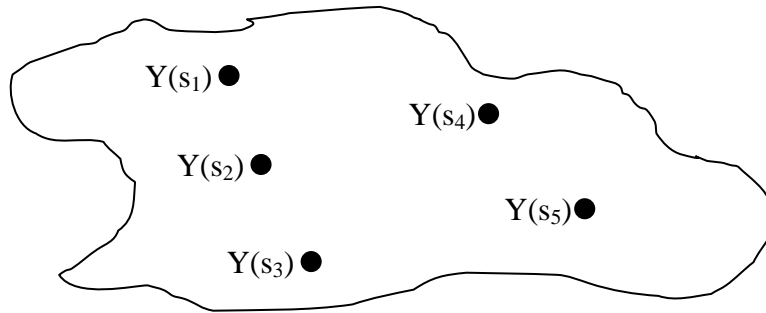
n : ukuran sampel

Dengan taraf signifikansi sebesar α , maka dapat diambil keputusan dengan menolak H_0 bila $A_n^2 < A_{tabel}^2$ atau menggunakan kriteria P-value $< \alpha$.

2.3 Spatial Extreme Modeling

Pada extreme value theory univariate, data atau kasus ekstrem hanya diukur dan dianalisis pada satu lokasi saja, namun kenyataannya kejadian ekstrem seperti hujan lebat, suhu ekstrem, badai, gempa bumi merupakan suatu kejadian alam yang terjadi secara alamiah serta dipengaruhi oleh kondisi suatu tempat. Kejadian curah hujan ekstrem biasanya diukur berdasarkan lokasi, oleh karena itu dibutuhkan pemodelan spasial ekstrem dalam menduga curah hujan ekstrem. Data spasial merupakan data multivariat karena diamati pada beberapa lokasi akibatnya ada asumsi tambahan yang harus dibuat, seperti asumsi dependensi spasial, agar dapat bekerja dengan model yang digunakan.

Dalam konsep spasial dimana kejadian pada suatu lokasi yang berdekatan cenderung memiliki kemiripan atau memiliki hubungan yang cukup erat dari pada kejadian pada lokasi yang lebih jauh.



Gambar 2.3 Ilustrasi Pengamatan Data Spasial.

Gambar 2.3 diberikan ilustrasi data spasial yang diamati yaitu Y sebagai nilai ekstrem pada 5 titik lokasi(s) dengan $s \in \mathbb{R}^d$ dimana $d = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dengan \mathbf{u} adalah *longitude* lokasi dan \mathbf{v} adalah *latitude* lokasi. Pengamatan pada titik yang berdekatan, misal $Y(s_1)$ dan $Y(s_3)$ atau $Y(s_2)$ dan $Y(s_3)$ memiliki dependensi yang lebih besar dibandingkan pengamatan pada titik yang berjauhan

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk pemodelan SEV adalah melalui multivariat *extreme value*. Pada data multivariat, pendekatan yang sering digunakan yaitu pendekatan copula dan proses max-stable. Pendekatan copula mengasumsikan sebaran marginal nilai ekstrem mengikuti sebaran seragam. Proses max-stable menggeneralisasi kan dimensi tak hingga dari distribusi EVT dimana sampel diambil dari nilai maksimum (maxima) pada setiap lokasi (proses

spasial) (Smith, 1990). Proses max-stable mentransformasikan sebaran marginal nilai ekstrem ke dalam sebaran Fréchet.

Misalkan $M(s,t)$ adalah data kejadian ekstrem pada lokasi s dan blok periode t pada domain spasial $D \subset \mathbb{R}^2$ distribusi dari $M(s,t)$ adalah :

$$M(s,t) \sim GEV(\mu(s,t), \sigma(s,t), \xi(s,t)),$$

dimana $\mu(s,t), \sigma(s,t), \xi(s,t)$ merupakan parameter lokasi, skala, dan bentuk dari distribusi GEV. Dengan asumsi bahwa tiap komponen pada tiap lokasi berdistribusi GEV, selanjutnya dilakukan transformasi kedalam unit marginal Frechet yang akan dibahas pada sub bab 2.3.2.

Ketika jumlah lokasi (m) yang diteliti berjumlah banyak, analisis menjadi sulit dilakukan karena multivariate extreme value berbasis distribusi dengan dimensi rendah atau terbatas (finite dimensional). Karena itu, digunakan pendekatan Max Stable Process untuk mengatasi hal tersebut.

2.3.1 Madogram

Konsep dasar madogram sendiri berasal dari semivariogram yang merupakan Grafik antara semivariansi terhadap fungsi jarak. Semivariogram dapat digunakan untuk mengukur dependensi spasial. Hubungan kebergantungan spasial antara titik titik lokasi turut ditentukan oleh jarak antar lokasi, semakin dekat suatu lokasi akan memiliki semivarian yang kecil dan berlaku sebaliknya. Konsep jarak yang digunakan yaitu konsep jarak Euclid.

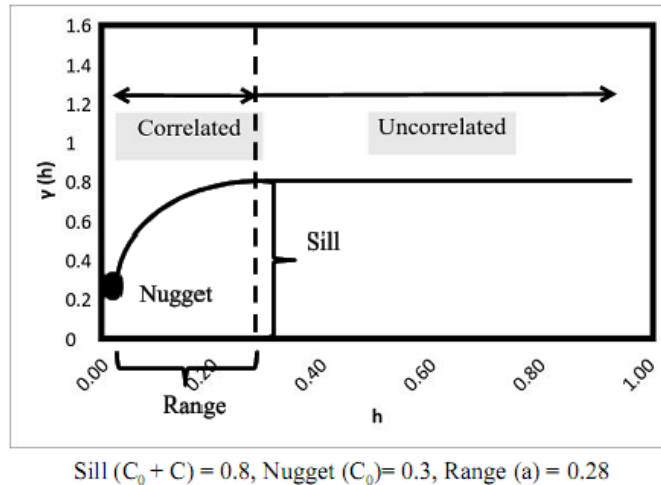
Semivariogram dapat digunakan untuk mengukur korelasi spasial berupa variansi selisih pengamatan pada lokasi s dan lokasi yang berjarak $s + h$ (Cressie, 1991). Semivariogram dapat didefinisikan oleh persamaan berikut:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E |Z(s+h) - Z(s)|^2 = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} |Z(s_i + h) - Z(s_i)|^2 \quad (2.12)$$

dengan:

- $\gamma(h)$: nilai semivariogram dengan jarak h
- $Z(s_i)$: nilai pengamatan di titik s_i
- $Z(s_i + h)$: nilai pengamatan di titik $(s_i + h)$
- $N(h)$: banyaknya pasangan titik yang berjarak h .

Sebelum menentukan model semivariogram, perlu dilakukan pendugaan terhadap parameter-parameter semivariogram. Parameter tersebut diduga berdasarkan plot semivariogram yang dihasilkan. Plot semivariogram ditunjukkan pada Gambar 2.4. Menurut Webster dan Oliver (2007) parameter yang diperlukan untuk mendiskripsikan plot semivariogram yaitu:



Gambar 2.4 Ilustrasi Plot Semivariogram

1. Nugget Effect (C_0)

Nugget Effect adalah pendekatan nilai semivariogram pada jarak di sekitar nol.

2. Sill ($C_0 + C$)

Sill merupakan sebuah nilai tertentu yang konstan yang dimiliki oleh semivariogram untuk jarak tertentu sampai dengan jarak yang tidak terhingga atau nilai semivariogram dimana menunjukkan sudah tidak terdapat lagi korelasi antar data. Apabila h semakin besar maka korelasi antara respon pada dua titik dengan jarak h akan dapat diabaikan. Dalam kasus seperti ini nilai semivariogram $\gamma(h) = \sigma^2$ sehingga partial sill (C) dalam plot semivariogram adalah varians.

3. Range (a)

Range merupakan jarak maksimum dimana masih terdapat korelasi antar data.

Semivariogram hanya bisa digunakan pada distribusi data yang memiliki ekor pendek yang artinya tidak bisa digunakan dalam kasus data extreme. Untuk mengatasi hal itu, Cooley et al. (2006) menggunakan semivariogram orde pertama

yang disebut madogram yang bisa digunakan untuk data ekstrem. Teori tentang madogram telah dipelajari oleh Matheron pada tahun 1987 dalam Cooley et al. (2006) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$v(h) = \frac{1}{2} E |Z(s+h) - Z(s)|. \quad (2.13)$$

Madogram mengharuskan momen pertama terhitung yang tidak selalu terjadi pada kasus ekstrem, untuk mengatasinya Cooley et al. (2006) memperkenalkan madogram yang mentransformasi peubah acak dengan menggunakan fungsi sebaran nilai ekstrem. Jika $Z(s)$ merupakan proses max-stable yang stasioner dan isotropik dengan fungsi sebaran G berdistribusi GEV, maka F madogramnya adalah sebagai berikut:

$$v(h) = \frac{1}{2} E |G(Z(s+h)) - G(Z(s))| \quad (2.14)$$

(untuk kekonsistenan, digunakan G untuk melambangkan sebaran nilai ekstrem).

Dalam proses penentuan pola semivariogram, terkadang melibatkan banyak titik pada plot semivariogram sehingga sulit untuk melihat pola tertentu. Untuk mengatasi hal tersebut, maka madogram dikelompokkan berdasarkan kesamaan jarak. Sehingga, perhitungan F - madogram dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{v}_F(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i=1}^{N(h)} |G(Z(s_i+h)) - G(Z(s_i))| \quad (2.15)$$

dengan $\hat{v}_F(h)$ adalah F - madogram pada lag h , s_i adalah lokasi titik pengamatan, $Z(s_i)$ adalah nilai pengamatan pada lokasi ke s_i , h adalah jarak antara dua lokasi, (s_i, s_i+h) adalah pasangan data yang berjarak h , dan $N(h)$ adalah banyaknya pasangan lokasi yang berjarak h .

2.3.2 Max Stable Process

Max Stable Process (MSP) merupakan perluasan dari distribusi multivariate extreme value ke dimensi tak hingga (infinite dimensional) dari teori nilai ekstrem (Extreme Value Theory) dimana sampel diambil dari nilai maksimum (maxima) pada setiap lokasi (proses spasial) (Smith, 1990). Proses max-stable banyak digunakan untuk memodelkan proses spasial ekstrem karena metode tersebut sesuai untuk memodelkan data spasial annual maxima (Ribatet,

2013). Suatu fungsi distribusi sembarang G seperti pada persamaan (2.14) dan (2.15) dikatakan max stable jika dan hanya jika G berdistribusi GEV. Misalkan S suatu himpunan acak dan $\{Y_i(s)\}_{s \in S}, i=1,2,\dots,n$ dimana n merupakan replikasi independent dari suatu proses stokastik kontinu. Asumsikan terdapat suatu fungsi kontinu dimana $a_n(s) > 0$ dan $b_n(s) \in \mathbb{R}$ sehingga :

$$Y(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n Y_i(s) - b_n(s)}{a_n(s)}, \quad n \rightarrow \infty, s \in S \quad (2.16)$$

dimana Y_1, \dots, Y_n merupakan replikasi independen dari Y , jika nilai limit ada (exist), maka proses limit $Y(s)$ disebut max-stable proses. Ada dua sifat yang mengikuti max-stable proses. Pertama yaitu dengan dimensi satu distribusi marginal nya mengikuti distribusi GEV, yaitu $Y \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$ dengan fungsi distribusi:

$$f(y; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]_+^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad -\infty < \mu, \xi < \infty, \sigma > 0.$$

Kedua, untuk distribusi marginal k-dimensi mengikuti distribusi *multivariate extreme value*. Pada persamaan (2.16) proses stokastik $\{Y(s)\}_{s \in S}$ adalah Max Stable Process (de Haan, 1984). Jika $a_n(s) = n$ dan $b_n(s) = 0$, maka $Y(s)$ juga merupakan simple Max Stable Process. Proses $\{Z(s)\}_{s \in S}$ adalah proses max-stable yang memiliki margin Frechet unit dengan fungsi distribusinya $F(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right), z > 0$. Proses ini dapat diperoleh dengan menstandarisasi

$\{Y(s)\}_{s \in S}$ sehingga diperoleh :

$$\{Z(s)\}_{s \in S} = \left\{ 1 + \frac{\xi(s)(Y(s) - \mu(s))}{\lambda(s)} \right\}_+^{\frac{1}{\xi(s)}}, \quad s \in S \quad (2.17)$$

dimana $\mu(s), \xi(s)$ dan $\lambda(s) > 0$ adalah suatu fungsi yang kontinu. Proses Z pada persamaan (2.17) masih termasuk max-stable proses (Padoan, Ribatet, Sisson, 2010). Secara umum Max Stable Process dengan unit marjinal Frechet dapat dijelaskan melalui persamaan berikut :

$$Z(s) := \max_{i \geq 1} (U_i W_i(s)), \quad s \in S, \quad (2.18)$$

dimana $\{U_i\}_{i \geq 1}$ merupakan Poisson proses \mathbb{R}_+ dan $W_i(s)$ adalah proses replikasi independen, dengan intensitas pengukuran $v(dx) \times u^{-2} du$. Dari model umum tersebut dikembangkan menjadi beberapa model yang max-stable diantaranya model Smith, Schalater, Brown resnik.

2.3.3 Model Smith

Smith (1990) memperkenalkan salah satu model spatial extreme value yang disebut model Smith. Misalkan $\{X_i, U_i\}_{i \geq 1}$ merupakan sebuah proses Poisson Π (phi) pada $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, dimana \mathbb{R} merupakan sebuah himpunan bilangan real. Dengan menghitung ukuran $\Pi(\cdot) := \sum_i I_{(X_i, U_i)}(\cdot)$ dan ukuran intensitasnya $v(dx) \times u^{-2} du$, dimana $I_{(X_i, U_i)}(A)$ adalah fungsi indikator dari sejumlah acak titik jatuh pada sebuah himpunan yang dibatasi $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ dan v merupakan sebuah ukuran positif. Untuk sebuah fungsi terukur nonnegative (untuk fixed $s \in S$) $f(x-s)$ sehingga $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-s) v(dx) = 1, \forall s \in S$ dimana $f(x-s)$ adalah densitas normal multivariat dengan mean nol, matriks kovarians Σ^{-1} dan $v(dx)$ merupakan ukuran Lebesgue, maka *Max Stable Process* pada persamaan (2.18) dimana $W_i(s) = f(X_i - s)$ sehingga:

$$Z(s) := \max_{i \geq 1} (U_i f(X_i - s)), \quad s \in S$$

Smith (1990) menggunakan kembali metode ini pada sebuah kasus tentang lingkungan yaitu pemodelan fenomena badai. Dengan U mewakili besarnya badai, X sebagai pusatnya (center), dan f sebagai parameter bentuk. Schalather dan tawn (2003) menyebut proses ini dengan sebutan *Storm Profile Model*.

Untuk sebuah himpunan yang berhingga (finite) dengan index $s_1, s_2, \dots, s_M \in S$ dan threshold positive z_1, z_2, \dots, z_M untuk $M \in \mathbb{N}$, distribusi dari vektor random $Z(s_1), \dots, Z(s_M)$ adalah

$$\Pr\{Z(s_m) \leq z_m, \quad m = 1, 2, \dots, M\} = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq m \leq M} \left\{ \frac{f(x - s_m)}{z_m} \right\} v(dx) \right].$$

yang mengikuti distribusi marginal dari unit frechet :

$$\Pr\{Z(s) \leq z\} = \exp\left[-z^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - s_m) v(dx)\right] = \exp\left(-\frac{1}{z}\right).$$

CDF bivariat model Smith untuk lokasi s_j dan s_k dapat ditunjukkan bahwa proses adalah:

$$P_r[Z(\mathbf{0}) \leq z_j, Z(\mathbf{h}) \leq z_k] = F(z_j, z_k)$$

$$F(z_j, z_k) = \exp\left[-\frac{1}{z_j} \Phi\left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{1}{a(\mathbf{h})} \log \frac{z_k}{z_j}\right) - \frac{1}{z_k} \Phi\left(\frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{1}{a(\mathbf{h})} \log \frac{z_k}{z_j}\right)\right] \quad (2.19)$$

dimana :

Φ : fungsi distribusi kumulatif normal standar

\mathbf{h} : $(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)^T$

$a(\mathbf{h}) : (\mathbf{h}^T \Sigma^{-1} \mathbf{h})^{1/2}$

Σ : matriks kovarian dari f .

z_i : variabel z lokasi ke- j

z_j : variabel z lokasi ke- k

Probability density function (PDF) bivariat dari model Smith yaitu :

$$f(z_j, z_k) = \exp\left(-\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_j} - \frac{\Phi(v(\mathbf{h}))}{z_k}\right) \times \left\{ \left(\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_j^2} + \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{z_j^2} - \frac{\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_j z_k} \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{\Phi(v(\mathbf{h}))}{z_k^2} + \frac{\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_k^2} - \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_j a(\mathbf{h})z_k} \right) + \left(\frac{v(\mathbf{h})\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_j^2 z_k} + \frac{w(\mathbf{h})\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_j z_k^2} \right) \right\} \quad (2.20)$$

$$\text{dengan } w(\mathbf{h}) = \frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log\left(\frac{z_k}{z_j}\right)}{a(\mathbf{h})} \text{ dan } v(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h}) + w(\mathbf{h})$$

Untuk mengestimasi parameter dari model smith digunakan metode Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE).

2.3.4 Model Schlather

Schlather (2002) memperkenalkan salah satu model *Max-Stable* yang disebut model Schlather. Diberikan $Y(\cdot)$ adalah suatu proses stasioner dimana $E[\max\{0, Y(s)\}] = 1$ dan $\{U_i, i \geq 1\}$ adalah proses Poisson dengan ukuran

intensitas $u^{-2} du$. Schlather menunjukkan bahwa proses stasioner *Max-Stable* dengan margin Frechet unit didefinisikan seperti pada persamaan berikut :

$$Z(s) := \max_{i \geq 1} (U_i Y_i(s)), \quad s \in S, \quad (2.21)$$

dimana $Y_i(\cdot)$ adalah replikasi identik independen dari $Y(\cdot)$.

Persamaan (2.21) masih sangat umum dan membutuhkan asumsi tambahan untuk mendapatkan model praktis. Schlather mengusulkan $Y_i(\cdot)$ sebagai proses Gaussian stasioner dengan fungsi korelasi $\rho(\mathbf{h})$. Dengan tambahan asumsi tersebut, maka dapat ditunjukkan proses CDF bivariat sebagai berikut:

$$P_r[Z(y_1) \leq z_1, Z(y_2) \leq z_2] = F(z_1, z_2)$$

$$F(z_1, z_2) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(\mathbf{h}) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right], \quad (2.22)$$

Schlather (2002) menunjukkan penjabaran persamaan (2.21), sehingga diperoleh CDF bivariat pada persamaan (2.22).

Fungsi korelasi yang digunakan dalam penelitian ini merupakan fungsi korelasi untuk data spasial yang didasarkan pada pengukuran jarak. Terdapat beberapa fungsi korelasi $\rho(\mathbf{h})$ yang berasal dari keluarga parametrik yang dapat digunakan antara lain (Ribatet, 2009):

$$1. \text{ Whittle-Matern} : \rho(h) = c_1 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right), \quad \nu > 0 \quad (2.23)$$

$$2. \text{ Cauchy} : \rho(h) = c_1 \left[1 + \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^2 \right]^{-\nu}, \quad \nu > 0 \quad (2.24)$$

$$3. \text{ Powered Exponential} : \rho(h) = c_1 \exp \left[-\left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^\nu \right], \quad 0 < \nu \leq 2 \quad (2.25)$$

$$4. \text{ Bessel} : \rho(h) = c_1 \left(\frac{2c_2}{\mathbf{h}} \right)^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right), \quad \nu \geq \frac{d-2}{2} \quad (2.26)$$

dengan Γ adalah fungsi Gamma, K_ν adalah fungsi Bessel yang sudah dimodifikasi jenis ketiga dengan derajat ν , J_ν adalah fungsi Bessel order ν , dan d adalah dimensi. Parameter lainnya adalah sebagai berikut:

c_1 : Parameter sill, $0 < c_1 \leq 1$

c_2 : Parameter range, $c_2 > 0$

v : Parameter smooth.

Fungsi PDF bivariat model Schlather sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2) = & \left[\frac{1}{4z_1^2} \frac{-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_1}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3}}{\sqrt{1-22(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}}} + \left\{ \frac{1}{4z_2^2} \frac{-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_2}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3}}{\sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}}} \right. \right. \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(\frac{-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_2}{(z_1+z_2)^3} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1}{(z_1+z_2)^3} + \frac{12(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^4}}{\sqrt{1-22(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}}} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_2}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3} \right) \left(-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_1}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3} \right)}{\left(\sqrt{1-22(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}} \right)^{3/2}} \right] \right\} \\
 & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}} \right) \right\} + \\
 & \left\{ \frac{1}{2z_2^2} \left(1 + \sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}} \right) + \frac{-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_1}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3}}{\sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}}} \right. \\
 & \left. \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}} \right) \right\} \\
 & \left\{ \frac{1}{2z_1^2} \left(1 + \sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}} \right) + \frac{-\frac{2(\rho(\mathbf{h})+1)z_2}{(z_1+z_2)^2} + \frac{4(\rho(\mathbf{h})+1)z_1z_2}{(z_1+z_2)^3}}{\sqrt{1-2(\rho(\mathbf{h})+1)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}}} \right. \\
 & \left. \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right) \right\} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

2.3.5 Model Brown Resnick

Model MSP Brown Resnick dikemukakan oleh Brown dan Resnick (1977) dan digeneralisasi oleh Kabluchko (2009) dengan mendefinisikan struktur dependensi $W_i(s) = \exp(\varepsilon_i(s) - \gamma(s))$ pada persamaan (2.18) sehingga menjadi persamaan (2.28).

$$Z(s) = \max_{i \geq 1} (U_i \exp(\varepsilon_i(s) - \gamma(s))), \quad s \in S, \quad (2.28)$$

dimana ε_i berdistribusi normal dengan semivariogram $\gamma(\mathbf{h})$ dan $\varepsilon(0) = 0$. Model Brown-Resnick memiliki fungsi distribusi kumulatif bivariat yang sama dengan model Smith yang didefinisikan pada persamaan (2.20) dengan $a(\mathbf{h}) = \sqrt{2\gamma(\mathbf{h})}$ sehingga :

$$\begin{aligned} P_r[Z(y_1) \leq z_1, Z(y_2) \leq z_2] &= F(z_1, z_2) \\ F(z_j, z_k) &= \exp \left[-\frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{\sqrt{2\gamma(\mathbf{h})}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\mathbf{h})}} \log \frac{z_k}{z_j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{z_k} \Phi \left(\frac{\sqrt{2\gamma(\mathbf{h})}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\mathbf{h})}} \log \frac{z_j}{z_k} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan Φ adalah fungsi distribusi kumulatif normal standar dan untuk lokasi s_i dan s_j . *Probability density function* (PDF) bivariat dari model Brown Resnick yaitu :

$$\begin{aligned} f(z_j, z_k) &= \exp \left(-\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_j} - \frac{\Phi(v(\mathbf{h}))}{z_k} \right) \times \left\{ \left(\frac{\Phi(w(\mathbf{h}))}{z_j^2} + \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{z_j^2} - \frac{\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_j z_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\Phi(v(\mathbf{h}))}{z_k^2} + \frac{\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_k^2} - \frac{\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})z_j a(\mathbf{h})z_k} \right) + \left(\frac{v(\mathbf{h})\varphi(w(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_j^2 z_k} + \frac{w(\mathbf{h})\varphi(v(\mathbf{h}))}{a(\mathbf{h})^2 z_j z_k^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{Dengan } w(\mathbf{h}) = \frac{a(\mathbf{h})}{2} + \frac{\log \left(\frac{z_k}{z_j} \right)}{a(\mathbf{h})} \quad \text{dan} \quad v(\mathbf{h}) = a(\mathbf{h}) + w(\mathbf{h}) \quad \text{dengan } j =$$

$1, 2, \dots, m-1$ dan $k=2, 3, \dots, m$.

2.4 Estimasi Parameter dengan *Maximum Pairwise Likelihood Estimation*

Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE) adalah metode estimasi parameter yang menggunakan fungsi densitas *pairwise*/berpasangan dari dua variabel. Prinsip dasar dalam MPLE adalah membuat turunan pertama

terhadap masing-masing parameter lalu menyamakan dengan nol. Dalam konteks model spasial distribusi GEV didefinisikan sebagai berikut :

$$GEV(\mu(s), \sigma(s), \xi(s)) \quad (2.31)$$

dimana parameter distribusi GEV mengikuti model *trend surface* yang mempunyai bentuk persamaan model regresi berganda dengan koordinat (latitude) dan bujur (longitude) sebagai variabel penjelas. Model *trend surface* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(s) &= \beta_{\mu,0} + \beta_{\mu,1} \text{longitude}(s) + \beta_{\mu,2} \text{latitude}(s) \\ \hat{\sigma}(s) &= \beta_{\sigma,0} + \beta_{\sigma,1} \text{longitude}(s) + \beta_{\sigma,2} \text{latitude}(s) \\ \hat{\xi}(s) &= \beta_{\xi,0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

proses estimasi parameter β_μ , β_σ , dan β_ξ berdasarkan PDF dari masing-masing model Max-Stable menggunakan MPLE. Nilai sample ekstrem (Y) di tranformasi ke margin *Frechet* ($Z(s)$) menggunakan persamaan 2.17, sehingga variabel dalam model Smith *Max-Stable Process* (MSP) adalah Z .

Metode *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE) menggantikan fungsi ($L(\beta)$) pada *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan fungsi *pairwise likelihood* $L_p(\beta)$.

$$L_p(\beta) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m-1} \prod_{k=j+1}^m f(y_{ji}, y_{ki}; \beta) \quad (2.33)$$

$f(y_{ji}, y_{ki}; \beta)$ merupakan *Probability Density Function* (PDF) bivariat dengan parameter β dan $n = 1, 2, \dots, N$ adalah observasi pada masing-masing variabel.

Estimasi parameter β ($\beta_\mu, \beta_\sigma, \beta_\xi$) hanya dapat diperoleh jika pembentukan fungsi *likelihood* didasarkan pada $f(y_{ji}, y_{ki}; \beta)$ dan bukan $f(z_{ji}, z_{ki}; \beta)$. Dengan demikian harus dibentuk fungsi $f(y_{ji}, y_{ki}; \beta)$ terlebih dahulu menggunakan persamaan

$$f(Y_j, Y_k; \beta) = f(Z_j, Z_k; \beta) |J(Y_j, Y_k)| \quad (2.34)$$

dimana $Z_j \equiv Z(s_j)$, $Z_k \equiv Z(s_k)$, $Y_j \equiv Y(s_j)$ dan $Y_k \equiv Y(s_k)$.

$$|J(Y_j, Y_k)| = \frac{1}{\sigma(s_j)\sigma(s_k)} \left(1 + \xi(s_j) \frac{z(s_j) - \mu(y_j)}{\sigma(y_j)} \right)^{\frac{1}{\xi(y_j)} - 1} \left(1 + \xi(y_k) \frac{z(y_k) - \mu(s_k)}{\sigma(s_k)} \right)^{\frac{1}{\xi(y_k)} - 1} \quad (2.35)$$

$f(Z_j, Z_k; \beta)$ adalah *Probability Density Function* (PDF) bivariat model pada *Max-Stable Process* (MSP) (Padoan, Ribatet, dan Sisson, 2010).

2.5 Koefisien Extremal

Dalam pemodelan nilai ekstrem menggunakan *Max-Stable Process*, pengukuran dependensi ekstremal sangat diperlukan. Koefisien ekstremal menggambarkan karakteristik metrik dari dependensi ekornya. Salah satu cara untuk mengetahui ukuran dependensi dari model MSP adalah melalui fungsi koefisien ekstremal θ_d . Misal G adalah sebaran Fréchet untuk masing-masing peubah Y . Koefisien ekstremal θ_d bisa didefinisikan melalui hubungan:

$$P\{\max(Y_1, \dots, Y_d) \leq y\} = G^{\theta_d}(y).$$

Asumsikan bahwa masing-masing fungsi sebaran marginal berasal dari sebaran Fréchet. Selanjutnya korelasi beberapa komponen dapat ditentukan melalui dependensi sebaran marginalnya. Misal Z adalah peubah acak maksimum berdimensi d dengan sebaran marginalnya adalah Fréchet dan sebaran nilai ekstrem peubah acak ganda dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P\{Z(s_1) \leq z_1, \dots, Z(s_d) \leq z_d\} = \exp\{-V(z_1, \dots, z_d)\}.$$

dengan V adalah persamaan eksponensial homogen berorde satu. V memiliki

dependensi penuh bila $V(z_1, \dots, z_d) = \max\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_d}\right)$ dan independensi penuh

bila $V(z_1, \dots, z_d) = \frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_d}$. Hubungan antara koefisien ekstremal θ_d dan V

dilihat dari $\theta_d = V(1, \dots, 1)$ dan sebaran nilai ekstrem multivariat Z dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P\{Z(s_1) \leq z, \dots, Z(s_d) \leq z\} = v(z, \dots, z) = \exp\left\{-\frac{\theta_d}{z}\right\},$$

dengan $1 \leq \theta_d \leq d$. Apabila $\theta_d = 1$ maka terjadi dependensi penuh dan apabila $\theta_d = d$ maka independen (Sari, 2013). Jeon dan Smith (2012) berpendapat bahwa koefisien ekstremal θ_d dan persamaan homogen V merupakan kasus khusus dalam domain spasial. Untuk Max-Stable proses yang terpenting dari ukuran dependensi adalah fungsi koefisien ekstremal.

$$\theta(s_1 - s_2) = -z \log \{Z(s_1) \leq z, \dots, Z(s_d) \leq z\}$$

Fungsi koefisien ekstremal dari model Smith, Schalater dan Brown-Resnick didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Smith} \quad \theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k) = 2\Phi \left(\frac{\sqrt{(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)}}{2} \right) \quad (2.36)$$

$$\text{Schalater} \quad \theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \rho(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)}{2}} \quad (2.37)$$

$$\text{Brown Resnick} \quad \theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k) = 2\Phi \left(\frac{\sqrt{\gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)}}{2} \right) \quad (2.38)$$

Koefisien ekstremal dan F - madogram memiliki hubungan yang sangat kuat yang ditunjukkan sebagai berikut (Cooley et al. 2006):

$$\theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k) = \frac{1 + 2v_F(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)}{1 - 2v_F(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)}$$

2.6 Pemilihan Model Terbaik

Takeuchi Information Criterion (TIC) akan digunakan untuk memilih kombinasi model trend surface terbaik, dengan model contoh model pada persamaan 2.32. Kriteria pemilihan model memiliki peran penting dalam menentukan model yang terbaik. Pada beberapa konteks tertentu, memilih model yang sederhana lebih baik daripada model yang kompleks. Menurut Padoan, Ribatet, dan Sisson (2010) mengusulkan menggunakan kriteria composite likelihood information yang dikembangkan menjadi TIC (Takeuchi, 1976) dan didefinisikan dengan persamaan (2.39) sebagai berikut:

$$TIC = -2\ell_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + 2\text{tr} \left\{ \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \right\} \quad (2.39)$$

dimana \mathbf{H} merupakan matriks informasi dan \mathbf{H}^{-1} menunjukkan varians parameter yang diestimasi, serta \mathbf{J} menunjukkan *square score statistic* yang masing-masing didefinisikan pada persamaan (2.40) dan (2.41) sebagai berikut:

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = - \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_k; \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}} \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} \quad (2.40)$$

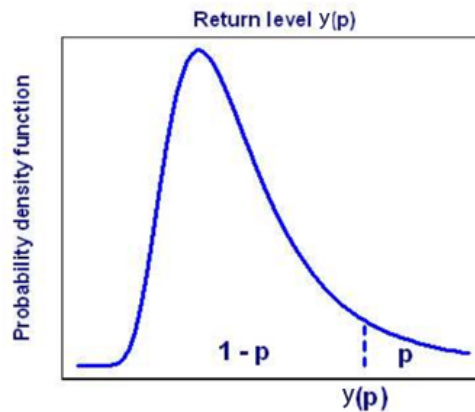
$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \frac{\partial \log f(Z_j, Z_k; \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} \frac{\partial \log f(Z_j, Z_k; \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T}, \quad (2.41)$$

dengan $j=1,2,\dots,m-1$, $k = 2,\dots,m$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah estimator *Maximum pairwise likelihood*.

TIC merupakan pengembangan dari Akaike Information Criterion (AIC). Seperti halnya pada AIC, pada dasarnya TIC juga menggunakan konsep entropi informasi, yaitu ukuran relatif dari informasi yang hilang ketika sebuah model yang diberikan digunakan untuk menggambarkan data sebenarnya. Konsep tersebut untuk menggambarkan bias dan varians dalam konstruksi model, atau dengan kata lain menjelaskan tentang akurasi dan kompleksitas model. Nilai TIC yang lebih rendah menunjukkan model yang lebih baik.

2.7 Return Level

Return level adalah suatu ambang batas maksimum yang dicapai dalam periode mendatang atau periode ulang (T) tertentu (Gilli & Kellezi, 2003). Konsep return level dan periode ulang biasanya digunakan untuk menyampaikan informasi tentang kemungkinan peristiwa langka seperti banjir.



Gambar 2.5 Ilustrasi Return Level (Mallor, Nualart, Omey, 2009)

Pada gambar 2.5 merupakan ilustrasi return level pada titik $y(p)$. Return level dengan periode ulang $T=1/p$ tahun adalah ambang batas tinggi $y(p)$ dengan Peluang terlampaui adalah p . Sebagai contoh, jika $p = 0,01$, maka periode ulangnya $T = 100$ tahun. Dua interpretasi umum return level dengan periode ulang T tahun adalah :

- i. Waktu tunggu: rata-rata waktu tunggu sampai terjadinya kejadian berikutnya adalah T tahun.
- ii. Jumlah peristiwa: rata-rata jumlah peristiwa yang terjadi dalam jangka waktu T -tahun adalah satu.

Peluang tercapainya ambang batas maksimum z_p ialah sebesar $p = 1/T$ yang ditunjukkan melalui persamaan $P(Y > z_p) = p$. Sedangkan return level diestimasi melalui persamaan (2.33) :

$$z_p(s) = \hat{\mu}(s) - \frac{\hat{\sigma}(s)}{\hat{\xi}(s)} \left(1 - \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\hat{\xi}(s)} \right). \quad (2.42)$$

2.8 Root Mean Square Error (RMSE)

Untuk validasi model, digunakan tolak ukur RMSE untuk mengukur kinerja dari model Smith, Schallert dan Brown-Resnick. Rumus RMSE untuk data testing sebagai berikut :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S (Y_i - \hat{Y}_i)^2}, \quad (2.43)$$

dengan S merupakan banyaknya lokasi, dimana Y_i merupakan nilai observasi aktual yang didapat dari data testing dan \hat{Y}_i merupakan nilai dugaan atau prediksi pada periode ulang (T).

2.9 Skewnes dan Kurtosis

Kemencengan (*skewness*) merupakan derajat ketidaksimetrisan atau dapat juga didefinisikan sebagai penyimpangan kesimetrisan dari suatu distribusi. Jika suatu kurva frekuensi dari suatu distribusi memiliki ekor kurva yang lebih panjang ke arah sisi kanan dibandingkan ke arah sisi kiri dari nilai maksimum tengah, maka distribusi ini dikenal dengan nama distribusi miring ke kanan, atau memiliki kemencengan positif. Untuk kondisi kebalikannya, distribusinya dikenal sebagai distribusi miring ke kiri atau memiliki kemencengan negatif. Skewnes dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\tau = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]^{3/2}} \quad (2.44)$$

Kurtosis adalah derajat ketinggian puncak atau keruncingan suatu distribusi. Sebuah distribusi yang mempunyai puncak yang relatif tinggi disebut *leptokurtik*, sementara kurva yang memiliki puncak datar atau rata disebut *platikurtik* sedangkan kurva dengan puncak yang tidak terlalu runcing ataupun terlalu datar disebut *mesokurtik* (Hafid, Anisa, Anna I, 2015). Kurtosis dapat dihitung sebagai berikut :

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]^2} \quad (2.45)$$

Ukuran yang digunakan untuk menyatakan keruncingan kurva distribusi atau *kurtosis* ini menggunakan momen keempat di sekitar nilai mean.

2.10 Curah Hujan dan Curah Hujan Ekstrem

Curah hujan (mm) adalah ketinggian air hujan yang terkumpul dalam tempat yang datar, tidak menguap, tidak meresap, dan tidak mengalir. Curah hujan satu milimeter artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air setinggi satu millimeter atau tertampung air sebanyak satu liter. Menurut BMKG dalam Kadarsah (2007), berdasarkan distribusi data rata-rata curah hujan bulanan, curah hujan di Indonesia dibedakan menjadi tiga tipe, yaitu :

1. Tipe Ekuatorial

Pola ekuatorial dicirikan oleh tipe curah hujan dengan bentuk bimodal (dua puncak musim hujan) yang biasanya terjadi sekitar bulan Maret dan Oktober atau pada saat terjadi ekuinoks, yaitu waktu atau peristiwa matahari berada dalam bidang katulistiwa bumi dimana peristiwa ini terjadi dua kali dalam setahun. Sebagian besar wilayah Sumatra dan Kalimantan, sering terjadi curah hujan yang mengikuti pola ini.

2. Tipe Monsoon

Curah hujan dipengaruhi oleh tiupan angin monsoon dan bersifat unimodal (satu puncak musim hujan, DJF (Desember-Januari-Februari) musim hujan, JJA

(Juni-Juli-Agustus) musim kemarau). Tipe hujan ini terjadi di wilayah Indonesia bagian selatan, seperti di ujung Pulau Sumatra bagian selatan, Jawa, Bali, Nusa Tenggara dan Maluku selatan.

3. Tipe Lokal

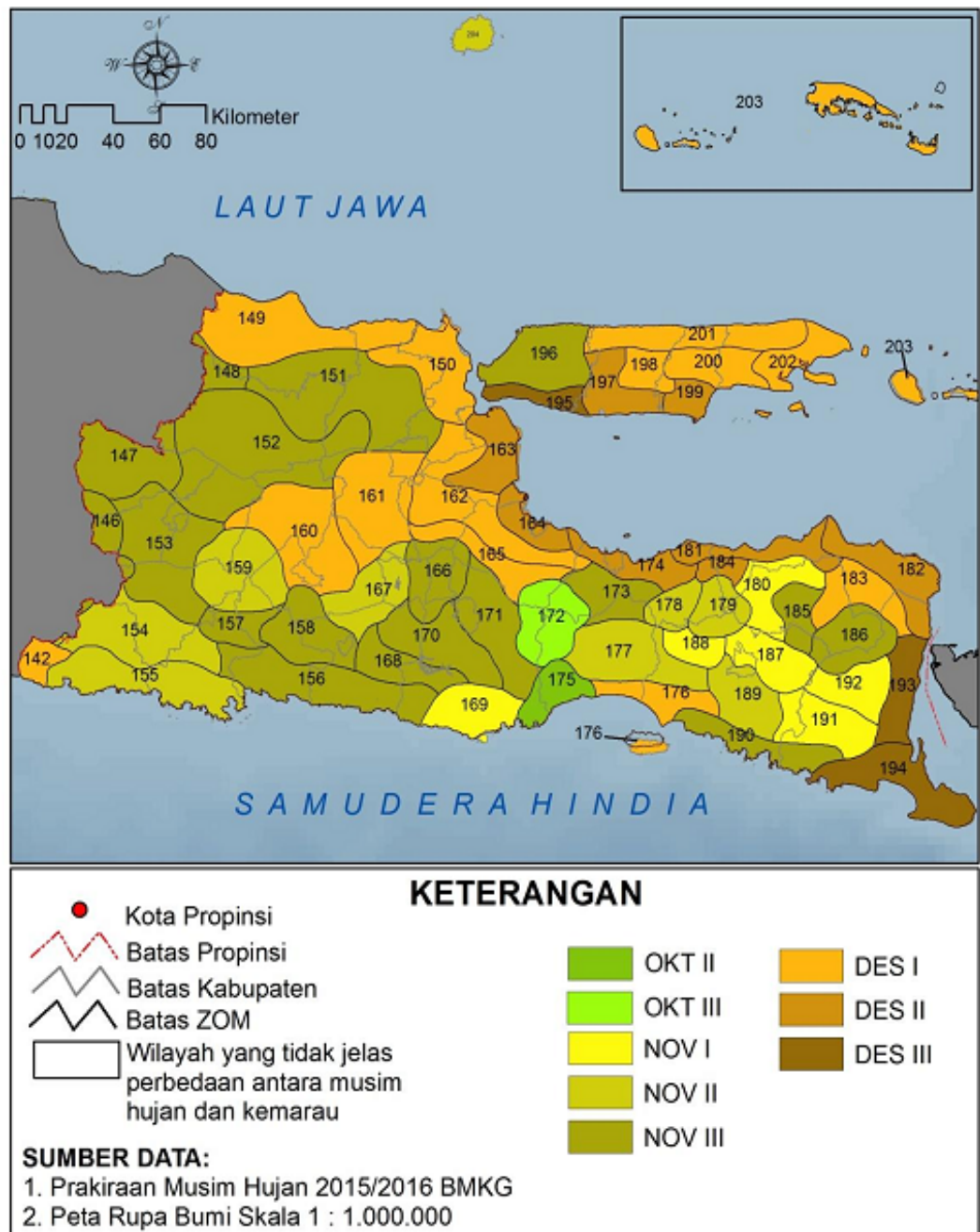
Curah hujan dipengaruhi oleh kondisi lingkungan setempat, yakni adanya bentang perairan sebagai sumber penguapan dan pegunungan sebagai daerah tangkapan hujan. Pola curah hujan lokal memiliki distribusi hujan bulanan kebalikan dengan pola monsoon, dicirikan oleh bentuk pola hujan unimodal (satu puncak hujan), tetapi bentuknya berlawanan dengan tipe hujan monsun.

Curah hujan dengan intensitas lebih dari 50 milimeter per hari menjadi parameter terjadinya hujan dengan intensitas lebat, sedangkan curah hujan ekstrem memiliki curah hujan lebih dari 100 milimeter per hari. Daerah di Indonesia yang memiliki curah hujan paling tinggi ialah Baturaden, Jawa Tengah dengan intensitas curah hujan mencapai 7,069 mm/tahun (BMKG, 2014).

2.11 Zona Musim

Zona Musim (ZOM) merupakan pembagian daerah-daerah di Indonesia berdasarkan pola distribusi curah hujan rata-rata bulanan. Berdasarkan hasil analisis data periode 30 tahun terakhir (1981-2010), secara klimatologis wilayah Indonesia terdapat 407 pola iklim, dimana 342 pola merupakan ZOM yaitu mempunyai perbedaan yang jelas antara periode musim hujan dan periode musim kemarau (umumnya pola Monsun), sedangkan 65 pola lainnya adalah Non Zona Musim (Non ZOM). Daerah Non ZOM pada umumnya memiliki ciri mempunyai dua kali puncak hujan dalam setahun (pola Ekuatorial) dan daerah sepanjang tahun curah hujannya tinggi atau rendah. Daerah yang memiliki batas yang jelas secara klimatologis antara periode musim hujan dan periode musim kemarau disebut dengan daerah Zona Musim (ZOM) (BMKG, 2014).

Pembagian wilayah ZOM kabupaten Jawa Timur akan ditampilkan pada Gambar 2.6, dimana kabupaten Ngawi berada di ZOM 146 (Karanganyar bagian timur, wonogiri bagian timur laut, magetan bagian barat, Ngawi bagian selatan) dan ZOM 147 (Grobogan bagian selatan, Sragen bagian utara, Ngawi dan Bojonegoro bagian barat daya).



Gambar 2.6 Pembagian Zona Musim (ZOM) di Provinsi Jawa Timur

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang bersumber dari Badan Meteorologi, Klimatologi dan Geofisika berupa data curah hujan dasarian di sepuluh pos pengukuran di Kabupaten Ngawi tahun 1991-2015.

Tabel 3.1 Nama Stasiun / Pos Pengamatan Curah Hujan Kabupaten Ngawi

No	Stasiun	Longitude (U)	Latitude (V)
1	Gemarang/Sokongadirejo	111,366	-7,396
2	Guyung	111,369	-7,383
3	Legundi/Karangjati	111,613	-7,461
4	Kedungbendo	111,543	-7,387
5	Kedungharjo/ Mantingan	111,150	-7,386
6	Kricak	111,344	-7,394
7	Jururejo/Mardiasri	111,405	-7,428
8	Ngancar/Papungan	111,369	-7,383
9	Paron	111,396	-7,437
10	Widodaren/Walikukun	111,223	-7,385

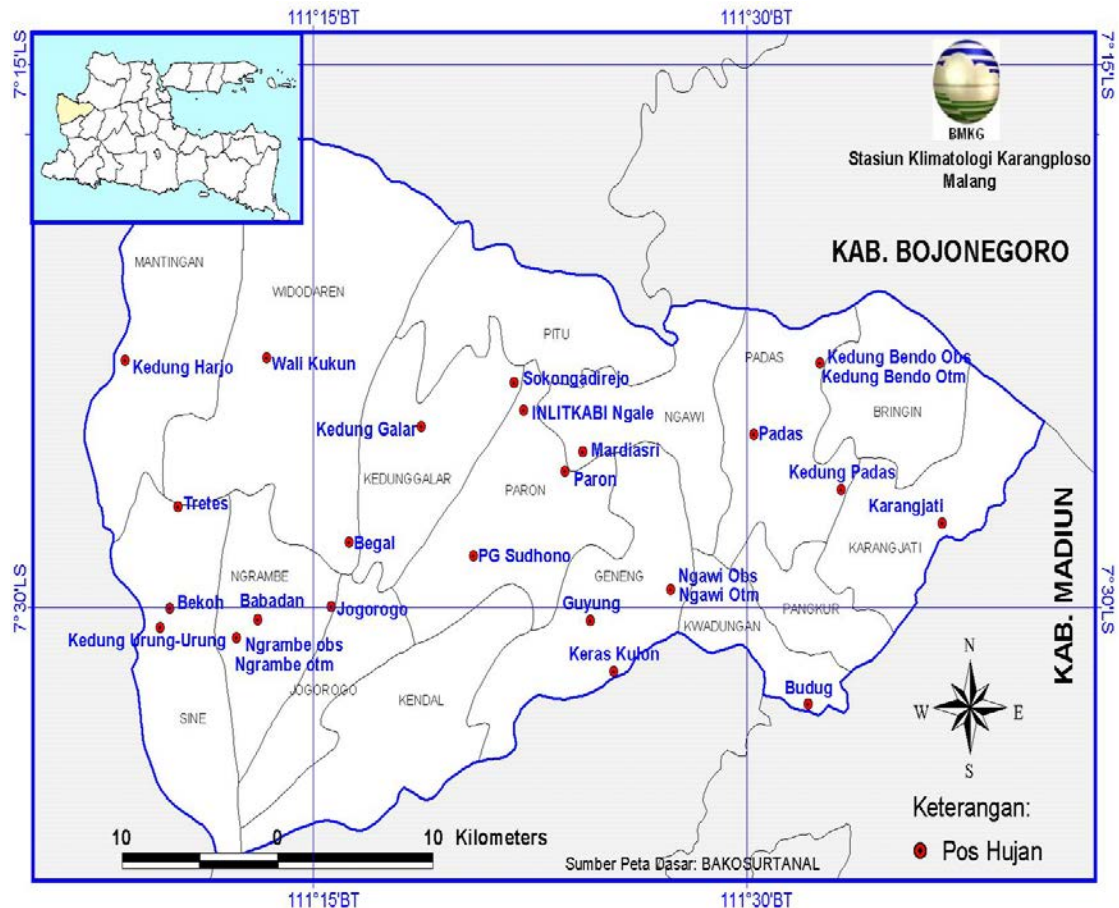
Data dibagi menjadi dua, yaitu data training untuk analisis dan data testing untuk validasi model. Data curah hujan dasarian tahun 1991-2011 akan digunakan sebagai data training, sedangkan untuk validasi digunakan data tahun 2012-2015. Struktur data yang digunakan ditunjukkan pada Tabel 3.2 dan 3.3.

Tabel 3.2 Struktur Data Training

No	Dasarian	Bulan	Tahun	X_1		X_2		\ddots	X_s	
				U_1	V_1	U_2	V_2		U_s	V_s
1	1	12	1991	$X_{1,1}$		$X_{1,2}$		\ddots	$X_{1,s}$	
2	2	12	1991	$X_{2,1}$		$X_{2,2}$		\ddots	$X_{2,s}$	
3	3	12	1991	$X_{3,1}$		$X_{3,2}$		\ddots	$X_{3,s}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\ddots	\vdots	
19	1	7	1992	$X_{19,1}$		$X_{19,2}$		\ddots	$X_{19,s}$	
20	2	7	1992	$X_{20,1}$		$X_{20,2}$		\ddots	$X_{20,s}$	
21	3	7	1992	$X_{21,1}$		$X_{21,2}$		\ddots	$X_{21,s}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\ddots	\vdots	
N	3	12	2011	$X_{N,1}$		$X_{N,2}$		\ddots	$X_{N,s}$	

Gambar 3.1 merupakan peta persebaran dan letak seluruh stasiun pemantau hujan yang ada di kabupaten ngawi. Kabupaten Ngawi terbagi dalam

dua zona musim yaitu zona musim 146 dan zona musim 147, untuk itu stasiun pemantau hujan yang akan digunakan adalah seluruh Kabupaten Ngawi yang berada pada Zona musim 147, kecuali stasiun yang terletak pada daerah ngawi bagian selatan karena terletak pada zona iklim 146.



Gambar 3.1 Peta Pos Hujan Kabupaten Ngawi

3.2 Tahapan Penelitian

Berikut ini adalah tahapan penelitian SEV dengan MSP :

1. Prosedur pemodelan MSP menggunakan model *Smith, Scholater, Brown-Resnick*
 - a. Mengidentifikasi distribusi data untuk mengetahui adanya distribusi data *heavy tail* dan nilai ekstrem dengan histogram.
 - b. Mengambil sampel ekstrem y_1, y_2, \dots, y_n dengan metode *Block Maxima*.
 - c. Mendapatkan estimasi parameter untuk $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ univariat pada masing-masing model dengan MLE dan diselesaikan secara numerik dengan metode iterasi Nelder-Mead.

- Membentuk formulasi probability distribution function (pdf) untuk distribusi GEV univariat.
 - Membentuk fungsi likelihood dari pdf distribusi GEV yang merupakan fungsi probabilitas bersama y_1, y_2, \dots, y_n
 - Membentuk \ln fungsi likelihood guna untuk memaksimumkan fungsi likelihood
 - Lalu Mendapatkan turunan pertama fungsi \ln likelihood terhadap masing-masing parameter yang diestimasi μ, σ, ξ dan disamakan dengan nol.
 - Bila hasilnya tidak close form maka digunakan metode numeric dengan metode iterasi Nelder-Mead.
- d. Menguji kesesuaian distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) terhadap data eskترم dengan uji *Anderson Darling* dan menentukan tipe distribusi menggunakan uji *Likelihood-Ratio*.
- e. Melakukan transformasi data ekstrem curah hujan yang telah diperoleh pada langkah-1b ke distribusi Frechet menggunakan persamaan 2.17.
- f. Menghitung dependensi spasial dengan menggunakan plot F-madogram dan plot koefisien ekstremal. Menggunakan rumus F-madogram pada persamaan 2.15.
- g. Menghitung koefisien extremal untuk setiap pasangan lokasi dengan rumus masing-masing model Max-Stable Smith, Schalater, Brown Resnick pada persamaan 2.36, 2.37, 2.38.
- h. Estimasi parameter model GEV spasial $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ dengan menggunakan model *trend surface* seperti pada persamaan 2.32. model *trend surface* parameter $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ adalah semua kombinasi model dengan komponen spasial garis lintang (*latitude*) dan bujur (*longitude*). Mulai dari model parameter hanya dengan satu variabel penjelas sampai model parameter dengan model kuadratik. Keseluruhan kombinasi model berlaku untuk semua parameter $\hat{\mu}(s)$ dan $\hat{\sigma}(s)$ sedangkan parameter $\hat{\xi}(s)$ diasumsikan bernilai konstan. Parameter β_μ, β_σ , dan β_ξ pada model *trend surface* berdasarkan PDF dari masing-masing model Max-Stable diperoleh

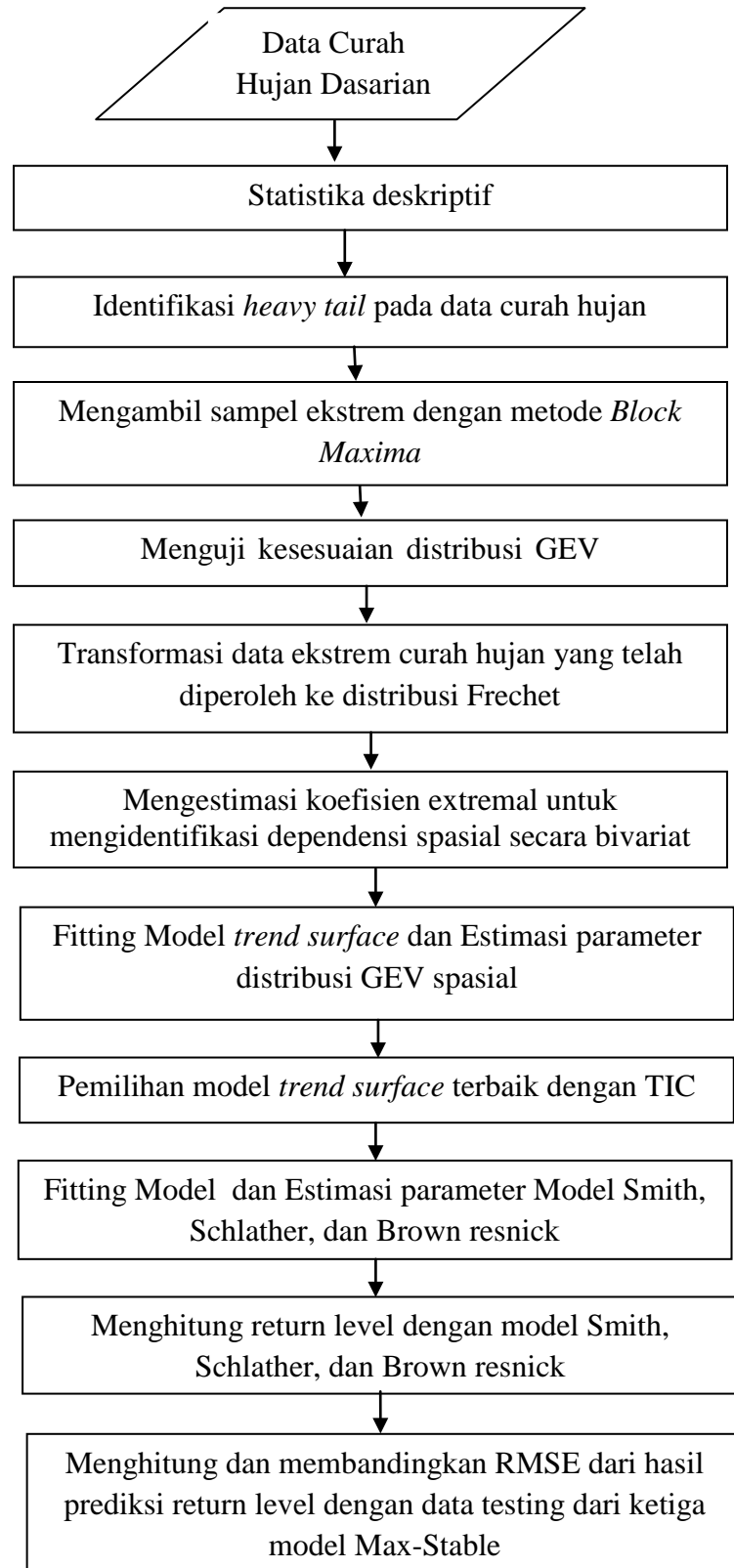
dengan menggunakan metode MPLE.

- i. Memilih model trend surface terbaik dari semua kombinasi model melalui nilai TIC terkecil dengan menggunakan persamaan 2.39. Kombinasi model trend surface terbaik yang terpilih kemudian digunakan untuk menentukan estimasi parameter dari masing masing model Max-Stable.
 - j. Estimasi parameter Max-Stable dengan model *Smith*, *Schlather* dan *Brown-Resnick* dengan prosedur.
 - Mendapatkan Estimasi parameter $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ Max-Stable untuk masing masing model (Smith, Schlather, Brown resnick) dengan menggunakan fungsi bivariate dari masing-masing model. Untuk setiap lokasi akan memiliki parameter $\hat{\mu}(s)$ dan $\hat{\sigma}(s)$ yang berbeda beda kecuali parameter $\hat{\xi}(s)$ yang bernilai konstan untuk semua lokasi.
 - Pada pemodelan model Schlather membentuk 4 model berdasarkan masing masing fungsi korelasi ($\rho(h)$) Whittle-Matern, Cauchy, Powered Exponential, Bessel. Kemudian keempat fungsi korelasi kemudian akan dipilih yang paling menghasilkan parameter dependensi terbaik berdasarkan criteria TIC terkecil. Kemudian fungsi korelasi yang terpilih akan digunakan untuk memodelkan model schlather.
 - k. Melakukan prediksi curah hujan ekstrem masing-masing lokasi dengan menentukan nilai return level masing-masing model dari data curah hujan di Kabupaten Ngawi menggunakan persamaan 2.42.
 - l. Menghitung error return level dari hasil prediksi return level dengan data actual testing dan membandingkan serta menentukan model yang terbaik dalam memprediksi return level diantara ketiga model, dengan menggunakan kriteria RMSE terkecil.
2. Prosedur pemodelan *Max Stable Process* terhadap data curah hujan ekstrem di Kabupaten ngawi.
 - a. Melakukan statistika deskriptif dan membuat *bar chart* untuk mengetahui karakteristik dan pola curah hujan di Kabupaten Ngawi tahun 1991-2011.

- b. Mengidentifikasi distribusi data curah hujan di masing-masing stasiun pengamatan untuk mengetahui adanya distribusi data *heavy tail* dan nilai ekstrem dengan histogram.
- c. Mengambil sampel ekstrem dengan metode *Block Maxima*, dengan membuat blok periode waktu tiga bulan yaitu Desember-Januari- Februari (DJF), Maret-April-Mei (MAM), Juni-Juli-Agustus (JJA), dan September-Oktober-Nopember (SON) untuk data curah hujan 1991-2011. Sampel nilai ekstrem diambil dari nilai maksimum curah hujan dari masing-masing blok.
- d. Menentukan estimasi parameter untuk $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ univariat pada masing-masing model dengan MLE dan diselesaikan secara numerik dengan metode iterasi Nelder-Mead.
- e. Menguji kesesuaian distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).
- f. Melakukan transformasi data ekstrem curah hujan yang telah diperoleh pada langkah-2c ke distribusi Frechet dimana y adalah sampel ekstrem curah hujan, s_i menunjukkan lokasi stasiun pengamatan curah hujan ke- i dan $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ adalah nilai parameter GEV yang diperoleh pada langkah-2d.
- g. Menghitung dependensi spasial data curah hujan dengan menggunakan plot F-madogram dan plot koefisien ekstremal.
- h. Memilih model trend surface terbaik dari semua kombinasi model melalui nilai TIC terkecil.
- i. Melakukan estimasi parameter distribusi GEV untuk data curah hujan.
- j. Melakukan interpretasi hasil pemodelan Spatial Extreme Value Max Stable Process berdasarkan model Smith, Schaleter dan Brown-Resnick dengan melihat plot F-Mandogram.
- k. Melakukan prediksi curah hujan ekstrem masing-masing lokasi dengan menentukan nilai return level dari data curah hujan di Kabupaten Ngawi.
- l. Menghitung RMSE dari hasil prediksi return level dengan data aktual testing / out sample dari masing-masing model prediksi berdasarkan lokasi.

3.3 Diagram Alir

Tahapan penelitian untuk mencapai kedua tujuan penelitian dapat digambarkan dalam diagram alir (*flowchart*) berikut ini :



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian awal bab ini dibahas mengenai prosedur pengkajian pemodelan *spatial extreme value max stable process* berdasarkan model Smith, Schlather dan Brown resnick, melalui tahap estimasi menggunakan *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE) dikarenakan hasilnya tidak close form diselesaikan menggunakan metode numerik Nelder-Mead. Pembahasan selanjutnya yaitu menerapkan pemodelan menggunakan ketiga model max-stable tersebut pada data curah hujan ngawi dari tahun 1991-2011. Metode pemilihan nilai ekstrem menggunakan metode Block Maxima, dan pada bagian akhir akan dibandingkan hasil *return level* dari ketiga metode tersebut sehingga didapatkan model yang terbaik untuk data curah hujan di Kabupaten Ngawi.

4.1 Prosedur Pemprosesan Dengan Max-Stable Proses

Pada tahap ini di jelaskan runtutan langkah – langkah dalam pengerjaan MSP, dimulai dari tahapan pengambilan sample ekstrem sampai mendapatkan return level.

- a. Pengambilan sampel ekstrem dengan metode *Block Maxima*

INPUT : Data x_1, x_2, \dots, x_N

OUTPUT : Nilai ekstrem y_1, y_2, \dots, y_n

Step 1 Membentuk block berdasarkan periode waktu (T)

Step 2 Mengambil sampel ekstrem (y) pada setiap block dengan kriteria nilai maximum.

- b. Mendapatkan estimasi parameter untuk $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ univariat pada masing-masing pos pemantau hujan (s) dengan MLE dan diselesaikan secara numerik dengan metode iterasi Nelder-Mead.

INPUT : Nilai ekstrem y_1, y_2, \dots, y_n

OUTPUT : Parameter $(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\xi}_1), \dots, (\hat{\mu}_s, \hat{\sigma}_s, \hat{\xi}_s)$.

Step 1 Membentuk fungsi likelihood dari pdf bersama distribusi GEV seperti persamaan 2.6

- Step 2 Membentuk \ln fungsi likelihood dari step 1 seperti persamaan 2.7
- Step 3 Mendapatkan turunan pertama fungsi \ln likelihood dari masing-masing parameter μ, σ, ξ berturut-turut seperti persamaan 2.8, 2.9, 2.10.
- Step 4 Bila hasilnya tidak close form maka diselesaikan menggunakan metode numerik dengan metode iterasi Nelder-Mead.
- c. Uji kesesuaian distribusi sampel ekstrem terhadap distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) dengan uji *Anderson Darling*.
- INPUT : Nilai ekstrem y_1, y_2, \dots, y_n
- OUTPUT : Statistik uji A^2 .
- Step 1 Menghitung Statistik uji dengan menggunakan rumus pada persamaan 2.11.
- d. Transformasi data ekstrem curah hujan ke distribusi Frechet dengan s_i menunjukkan lokasi stasiun pengamatan curah hujan ke- i .
- INPUT : Nilai ekstrem $y_1, y_2, \dots, y_n, (\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\xi}_1), \dots, (\hat{\mu}_s, \hat{\sigma}_s, \hat{\xi}_s)$
- OUTPUT : $Z(s_i)$.
- Step 1 Menghitung $Z(s_i)$ dengan rumus transformasi pada persamaan 2.17.
- e. Menghitung dependensi spasial dengan menggunakan plot F-madogram dan plot koefisien ekstremal :
- INPUT : $Z(s_i)$
- OUTPUT : F-madogram $(\hat{v}_F(\mathbf{h}))$, koefisien ekstermal $\theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)$ model Smith dan model Schlather.
- Step 1 Menghitung $\hat{v}_F(\mathbf{h})$ dan $\theta(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)$ dengan rumus persamaan (2.26) dan persamaan 2.36, 2.37.

Step 2 Jika terjadi $1 \leq \theta(\mathbf{h}) \leq 2$ maka ada dependensi. Apabila $\theta(\mathbf{h}) = 1$ maka terjadi dependensi penuh dan apabila $\theta(\mathbf{h}) = 2$ maka independen.

f. Estimasi parameter GEV spasial $GEV(\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s))$

INPUT : $Z(s_i)$, Garis lintang/longitude (u) dan Garis Bujur/latitude (v)

OUTPUT : Kombinasi terbaik $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$.

Step 1 Membuat kombinasi *trend surface* yang mengikuti model regresi seperti contoh pada persamaan 2.32. Dengan kombinasi model Mulai dari model parameter hanya dengan satu variabel penjelas sampai model parameter dengan model kuadratik. Untuk parameter $\hat{\xi}(s)$ diasumsikan bernilai konstan dan parameter β di estimasi dengan menggunakan MPLE dari pdf GEV.

Step 2 Memilih model trend surface terbaik dengan nilai TIC terkecil, dengan menggunakan persamaan 2.39.

g. Estimasi parameter Max-Stable dengan model *Smith*, *Schallert* dan *Brown-Resnick*. Kombinasi terbaik pada langkah f digunakan untuk menaksir parameter model berikut :

- Model Smith

INPUT : $Z(s_i)$, Garis lintang / longitude (u) dan Garis Bujur / latitude (v) perlokasi, Kombinasi terbaik $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$

OUTPUT : $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$

Step 1 Estimasi parameter model smith diperoleh dari PDF Smith (2.31) yang diestimasi dengan metode MPLE. Turunan pertama terhadap masing-masing parameter yang diestimasi dengan MPLE dapat dipastikan memiliki bentuk yang tidak close form, sehingga untuk menyelesaikan persamaan-

persamaan tersebut menggunakan metode numerik Nelder-Mead.

- Model Schalather

INPUT : $Z(s_i)$, Garis lintang / longitude (u) dan Garis Bujur / latitude (v) perlokasi, Kombinasi terbaik $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$

OUTPUT : $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$.

Step 1 Estimasi parameter model smith diperoleh dari PDF bivariat Schlather (2.36) yang di estimasi dengan metode MPLE. Turunan pertama terhadap masing-masing parameter yang diestimasi dengan MPLE dapat dipastikan memiliki bentuk yang tidak close form, sehingga untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut menggunakan metode numerik Nelder-Mead.

Step 2 Memodel kan Schlater dengan fungsi korelasi $\rho(h)$, Whittle-Matern (2.23), Cauchy (2.24), Powered Exponential (2.25), Bessel (2.26).

Step 3 Memilih model Schalther terbaik dari ke empat fungsi korelasi berdasarkan nilai TIC terkecil.

Keunggulan model Schlather yaitu mampu menangkap dependensi spasial lebih baik dari model lainnya karena di dalam fungsinya terdapat fungsi korelasi.

- Model Brown-renick

INPUT : $Z(s_i)$, Garis lintang / longitude (u) dan Garis Bujur / latitude (v) perlokasi, Kombinasi terbaik $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$

OUTPUT : $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s)$ dan $\hat{\xi}(s)$.

Step 1 Estimasi parameter model smith diperoleh dari PDF bivariat Brown-renick (2.40) yang di estimasi dengan metode

MPLE. Turunan pertama terhadap masing-masing parameter yang diestimasi dengan MPLE dapat dipastikan memiliki bentuk yang tidak close form, sehingga untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut menggunakan metode numerik Nelder-Mead.

h. Mengitung prediksi Return.

INPUT : P tahun prediksi, $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ dari model Smith, Schlather dan Brown resnick.

OUTPUT : Return level $z_p(s)$ model Smith, Schlather dan Brown resnick.

Step 1 Menentukan periode ulang T

$$T = P \text{ tahun} \times 4 \text{ (banyak blok)}$$

Step 2 Menghitung Return Level dengan rumus pada persamaan 2.42.

i. Menghitung Kesalahan Prediksi Return level

INPUT : Curah maksimum aktual data testing ($y(s_i)$), $z_p(s)$

OUTPUT : RMSE.

Step 1 Tranformasi hasil return level $z_p(s)$ ke bentuk data curah hujan dalam mm/hari ($\hat{y}(s_i)$).

$$\text{Dengan persamaan } z_p(s) \rightarrow \hat{y}_i = \frac{\hat{\lambda}_i \left(z_p(s)^{\hat{\xi}_i} - 1 \right)}{\hat{\xi}_i} + \hat{\mu}_i.$$

Step 2 Menentukan satu nilai ekstrem yang paling besar dari semua lokasi pada periode ulang T tahun ($y(s_i)$) data testing.

Step 3 Menghitung RMSE dengan rumus pada persamaan 2.43 dimana RMSE dihitung berdasarkan lokasi.

4.2 Penyusunan Model Max-Stable Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi

Pada bagian ini dibahas penyusunan model Max-stable dengan menggunakan model Smith, Schlather dan Brown resnick dimulai dari identifikasi data curah hujan, pemilihan sampel ekstrem dengan Block Maxima, estimasi

parameter GEV univariate, uji kesesuaian distribusi GEV, estimasi parameter GEV spasial, estimasi parameter Max-stable dengan model Smith, Schlather, Brown resnick. Dan didapatkan hasil prediksi *return level*. Prediksi *return level* dilakukan untuk 2, 4, 8 dan 10 tahun kedepan.

4.2.1 Deskripsi Curah Hujan di Kabupaten Ngawi

Deskripsi curah hujan di sepuluh stasiun pengamatan perlu dilakukan sebagai informasi awal untuk mengetahui karakteristik atau Gambaran umum dan pola curah hujan yang digunakan. Data curah hujan yang digunakan terdapat pada lampiran 1, pada Tabel 4.1 menunjukkan rentang rata-rata curah hujan harian di Kabupaten Ngawi berkisar antara 4,768 sampai 6,639. Rata-rata curah hujan harian tertinggi yaitu 6,639 mm/hari berada pada pos Karang jati, sedangkan rata-rata curah hujan terendah ada pada pos Kedungbendo yaitu sebesar 4,768 mm/hari. Namun bila dilihat dari Secara keseluruhan berdasarkan nilai maximum curah hujan tertinggi adalah 282 mm yaitu di pos Walikukun.

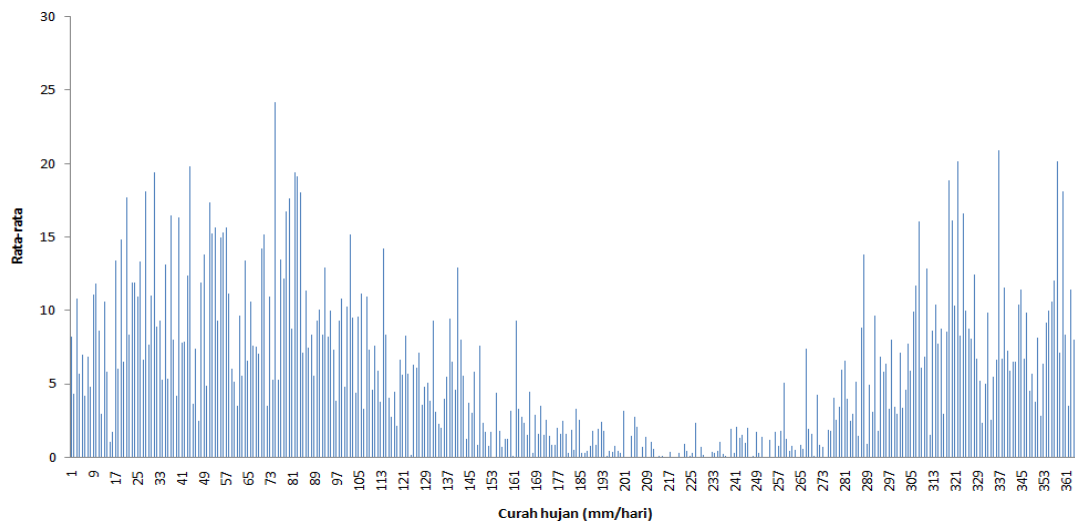
Tabel 4.1 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum, Nilai Maksimum,Skewness dan Kurtosis Curah Hujan (mm/hari)

Pos Pengamatan	Rata-rata (mm/hari)	Standar Deviasi	Minimum (mm/hari)	Maksimum (mm/hari)	Skewness	Kurtosis
Gemarang/Sokongadirejo	5,018	14,595	0	160	4,38	23,16
Guyung	6,257	16,221	0	136	3,74	16,1
Legundi/Karangjati	6,639	16,827	0	201	3,45	14,62
Kedungbendo	4,768	13,706	0	129	4,21	21,04
Kedungharjo/ Mantingan	5,521	14,856	0	240	4,4	28,53
Kricak	4,906	13,022	0	150	4,15	22,27
Jururejo/Mardiasri	5,913	15,362	0	162	4	20,25
Ngancar/Papungan	5,21	14,271	0	193	4,18	22,66
Paron	5,235	14,411	0	161	4,2	22,2
Widodaren/Walikukun	6,125	16,319	0	282	4,02	24

Selain rata-rata, Tabel 4.1 juga menunjukkan nilai standard deviasi, skewnes dan kurtosis curah hujan di masing-masing pos pengamatan. Standard deviasi digunakan untuk melihat keragaman dari data, pos Legundi/Karangjati memiliki keragaman curah hujan yang paling tinggi yaitu sebesar 16,827 dan Pos Kedungbendo memiliki keragaman curah hujan yang paling rendah sebesar 13,706. Pos Kedungharjo/Mantingan memiliki nilai Skewnes paling tinggi yaitu sebesar 4.4 dan Pos Legundi/Karangjati memiliki nilai Skewnes terendah yaitu

sebesar 3,45, perhitungan nilai Skewnes menggunakan persamaan 2.44. Kurtosis digunakan untuk melihat derajat keruncingan suatu distribusi, perhitungan nilai Kurtosis menggunakan persamaan 2.45. Pos Kedungharjo / Mantingan memiliki nilai Kurtosis paling tinggi yaitu sebesar 28,53 dan Pos Legundi / Karangjati memiliki nilai Skewnes terendah yaitu sebesar 14,62.

Untuk mengetahui pola curah hujan di masing-masing pos pengamatan yang diteliti maka dilakukan identifikasi dengan menggunakan histogram. Gambar 4.1 merupakan diagram batang yang terbentuk dari rata-rata curah hujan mulai berdasarkan hari sebanyak 365 hari per tahun dari mulai 1991 - 2011 di pos Mardiasari.

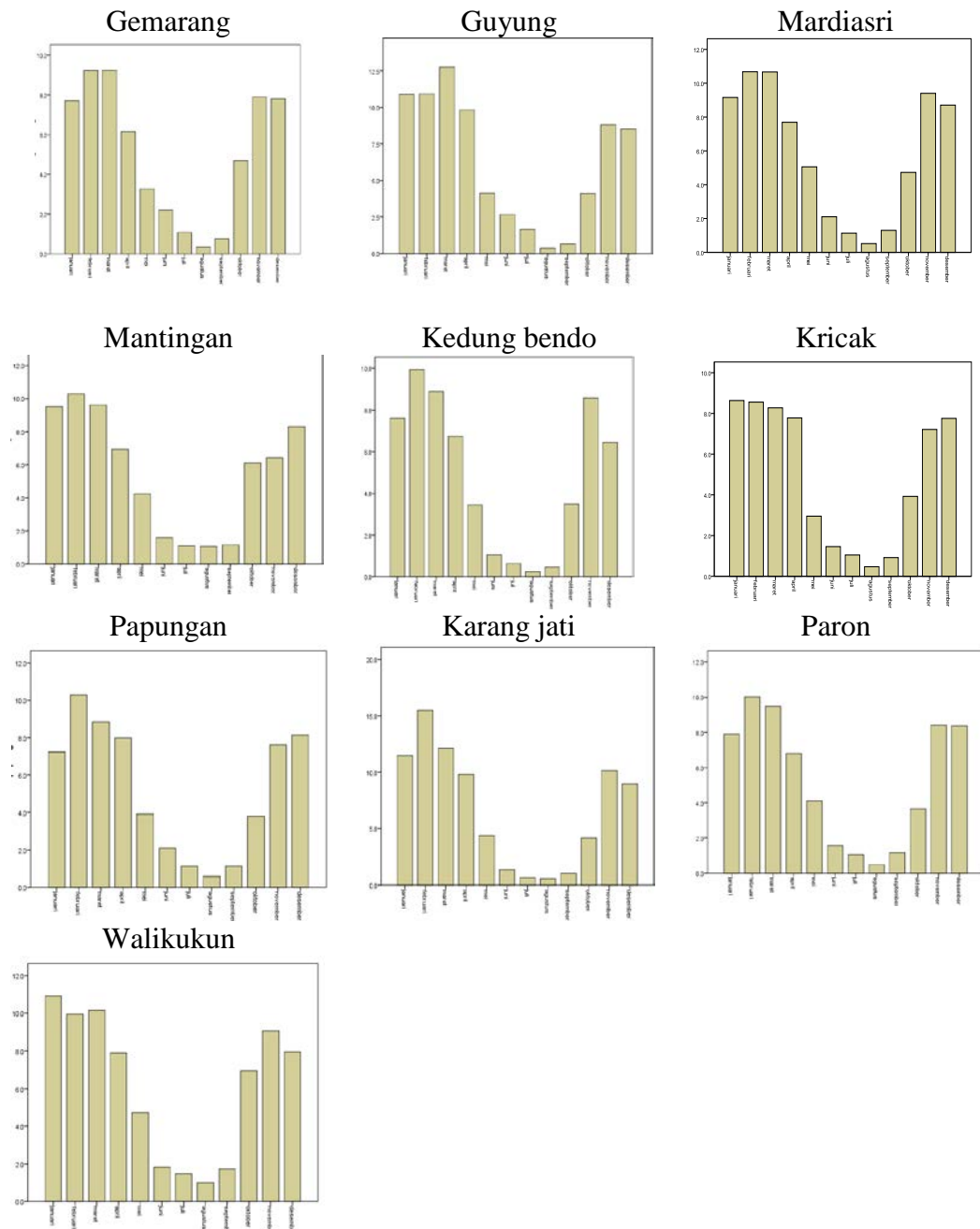


Gambar 4.1 Histogram curah hujan pos Mardiasri berdasarkan harian

Pola curah hujan yang terbentuk pada Gambar 4.1 berbentuk U, diawali titik-titik puncak turun lambat kemudian naik kembali Histogram curah hujan berdasarkan hari untuk Sembilan pos lain nya dapat dilihat di Lampiran 2. Selain melihat pola histogram curah hujan berdasarkan hari, pola curah hujan dapat pula dilihat menurut Bulan.

Pola yang hampir sama terjadi pada seluruh pos pemantau hujan dikabupaten ngawi, pola tersebut berbentuk U dan memiliki satu puncak curah hujan (unimodial) dapat dilihat pada Gambar 4.2 yang berarti tipe curah hujan di sepuluh pos adalah monsoon. Sifat tipe monsoon yaitu perbedaan musim yang jelas, yaitu musim hujan yang terjadi pada bulan Desember-Januari-Februari (DJF), ditandai dengan tingginya curah hujan, dan musim kemarau yang terjadi

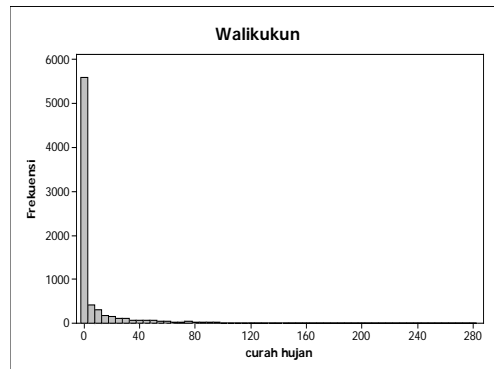
pada bulan Juni-Juli-Agustus (JJA), dengan curah hujan yang rendah. Hal ini mengidentifikasi bahwa sepuluh lokasi memiliki karakteristik hujan yang sama, sehingga memungkinkan terjadi dependensi antar lokasi. Pola curah hujan Pos pengamatan curah hujan Gemarang, Guyung, Mardiasri, Mantingan, Kedung bendo, Kricak, Papungan, Karang jati, Paron, dan Walikukun dapat dilihat pada Gambar 4.2 sebagai berikut.



Gambar 4.2 Rata-rata Curah Hujan Harian Menurut Bulan dan Lokasi

4.2.2 Identifikasi Perilaku Ekor (*Heavy Tail*) Dari Data

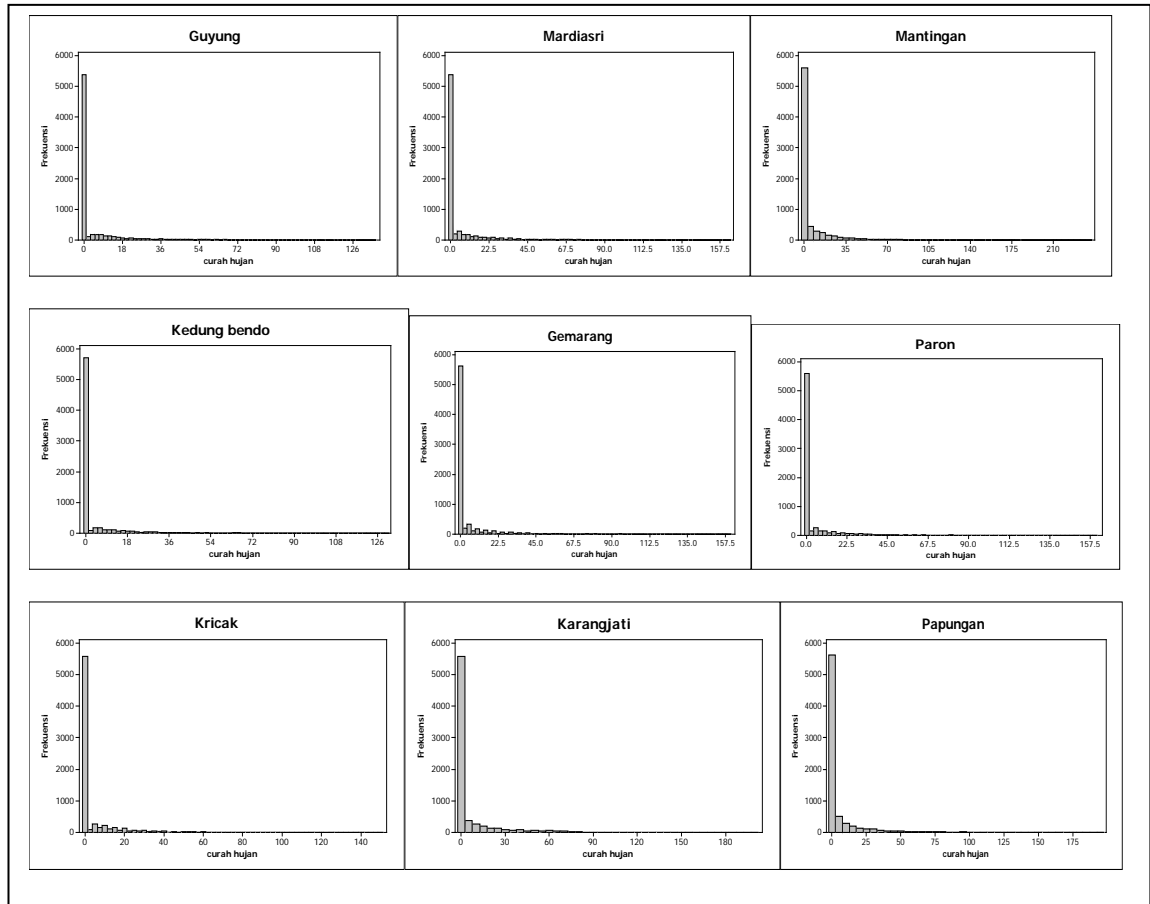
Identifikasi perilaku ekor (*heavy tail*) ini bertujuan untuk mengetahui ada tidak nya Pola data *heavy tail* yang menunjukkan bahwa data curah hujan mengandung nilai-nilai ekstrem. Pada proses ini identifikasi dilakukan menggunakan histogram data curah hujan perlokasi dari taun yang telah ditentukan sebelumnya.



Gambar 4.3 Histogram curah hujan pos Walikukun

Histogram Pada Gambar 4.3 mengindikasikan bahwa curah hujan di Stasiun Banyubiru memiliki pola data *heavy tail* dimana terlihat ekor distribusinya turun secara lambat yang artinya mengandung nilai ekstrem. Pada Gambar 4.4 disajikan histogram sembilan pos pemantau hujan lainnya di Kabupaten Ngawi.

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa curah hujan di sembilan pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi mengindikasikan bahwa data di setiap pos memiliki pola *heavy tail*. Dengan adanya indikasi pola *heavy tail* artinya bahwa data curah hujan pada lokasi tersebut mengandung nilai ekstrem. Nilai ekstrem dan pola *heavy tail* menyebabkan bahwa data curah hujan harian di pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi tidak berdistribusi normal, sehingga agar dapat diidentifikasi lebih lanjut maka perlu menggunakan metode EVT. Data curah hujan harian di Kabupaten Ngawi diukur atau dikumpulkan pada beberapa lokasi yang berbeda, oleh karena itu metode EVT yang digunakan harus turut mengakomodasi adanya unsur spasial atau lokasi yaitu menggunakan metode SEV dengan pendekatan MSP.



Gambar 4.4 Histogram Curah Hujan Seluruh Pos Pemantau Hujan
Kabupaten Ngawi

4.2.3 Identifikasi Ekstrem Dengan Block Maxima

Pengambilan data ekstrem dilakukan dengan menggunakan metode Block Maxima yaitu pertama dengan membuat periode block yang dikehendaki sesuai dengan musim. Pada penelitian ini digunakan block periode tiga bulanan (DJF, MAM, JJA, SON). Pembagian data dalam waktu tiga bulanan ini didasarkan pada pola curah hujan di sepuluh stasiun pengamatan di Kabupaten Ngawi yang berpola monsun. Pada pola monsun, pembagian periode musimnya meliputi DJF yang merupakan periode musim hujan, MAM merupakan periode transisi dari musim hujan ke musim kemarau, JJA merupakan periode musim kemarau, dan SON merupakan periode transisi dari musim kemarau ke musim hujan.

Setelah dilakukan pembagian kedalam periode blok masing-masing lalu nilai ekstrem diambil dengan melihat nilai terbesar atau maksimum dari setiap

blok tersebut. Banyaknya data ekstrem yang diperoleh dengan blok 3 bulanan adalah 81 pengamatan pada masing-masing stasiun pengamatan curah hujan. Penentuan ukuran blok dalam metode *block maxima* merupakan hal yang sulit karena ukuran blok yang terlalu kecil dapat menghasilkan parameter yang bias sedangkan ukuran blok yang terlalu panjang maka data ekstrem yang diperoleh menjadi sedikit sehingga tidak cukup untuk menaksir model, akibatnya menghasilkan varians yang besar (Coles, 2001). Pada penelitian ini digunakan blok tiga bulan (DJF-MAM-JJA-SON) berdasarkan acuan BMKG yang pengklasifikasikan pola hujan monsun pada sebagian besar wilayah di Pulau Jawa. Selain itu, ingin diidentifikasi curah hujan ekstrem yang terjadi pada musim kemarau sehingga pada penelitian ini tetap mengikuti data pada periode musim kemarau, meskipun diperoleh nilai curah hujan nol seperti yang terlihat pada Tabel 4.2. Tabel 4.2 disajikan ringkasan dari nilai ekstrem yang diperoleh dari setiap pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi. Data sample ekstrem selengkapnya disajikan pada Lampiran 3.

Tabel 4.2 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum dan Nilai Maksimum Sampel Ekstrem (mm)

Pos hujan	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Gemarang/Sokongadirejo	70,16	37,69	0	160
Guyung	69,49	36,78	0	169
Legundi/Karangjati	74,68	37,66	0	162
Kedungbendo	69,47	46,28	0	246
Kedungharjo/Mantingan	64,75	34,66	0	150
Kricak	77,83	38,75	0	158
Jururejo/Mardiasri	71,99	41,04	0	201
Ngancar/Papungan	50,64	33,15	0	137
Paron	69	38,75	0	161
Widodaren/Wali Kukun	75,42	38,35	0	282

4.2.4 Dugaan Nilai Parameter GEV Univariat

Data ekstrem yang diperoleh dari Blok Maxima (Lampiran 2) kemudian digunakan untuk menaksir parameter GEV univariat yaitu $\hat{\mu}$ parameter lokasi, $\hat{\sigma}$ parameter skala, dan $\hat{\xi}$ sebagai parameter bentuk. Dimana parameter yang akan ditaksir merupakan parameter perlokasi berdasarkan periode blok tiga bulan. Parameter $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, dan $\hat{\xi}$ dihasilkan dari proses estimasi menggunakan MLE,

karena parameter yang dihasilkan tidak close form maka digunakan lah metode numerik Nelder-Mead. Hasil estimasi parameter GEV Univariat ditampilkan pada Tabel 4.3 sebagai berikut:

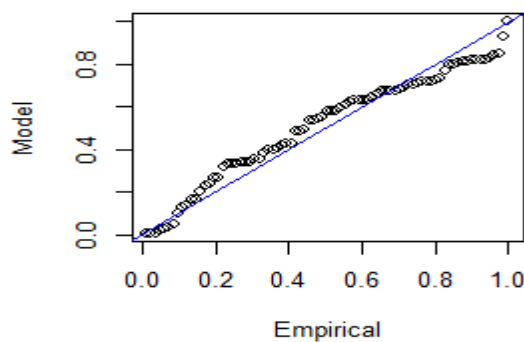
Tabel 4.3 Nilai Parameter $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, dan $\hat{\xi}$ GEV univariat

Pos hujan	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$
Gemarang/Sokongadirejo	57,18313	37,7988	-0,29803
Guyung	66,26428	40,65674	-0,56425
Legundi/Karangjati	55,92332	39,07293	-0,18936
Kedungbendo	43,56881	34,88528	-0,29744
Kedungharjo/Mantingan	55,74868	35,3038	-0,07952
Kricak	52,69992	34,75482	-0,29363
Jururejo/Mardiasri	61,40635	37,22941	-0,27921
Ngancar/Papungan	56,57705	36,01285	-0,19223
Paron	55,27988	38,08769	-0,27581
Widodaren/Wali Kukun	59,40595	34,16979	-0,07648

Tabel 4.3 memuat informasi tentang hasil estimasi parameter pada masing-masing pos pemantau hujan, didapatkan pula bahwa hasil estimasi parameter menunjukkan distribusi data curah hujan ekstrem di sepuluh stasiun pengamatan curah hujan adalah berdistribusi Weibull dikarenakan parameter bentuk bernilai negatif ($\hat{\xi} < 0$) yang merupakan salah satu tipe dari distribusi GEV.

4.2.5 Uji Kesuaian Distribusi

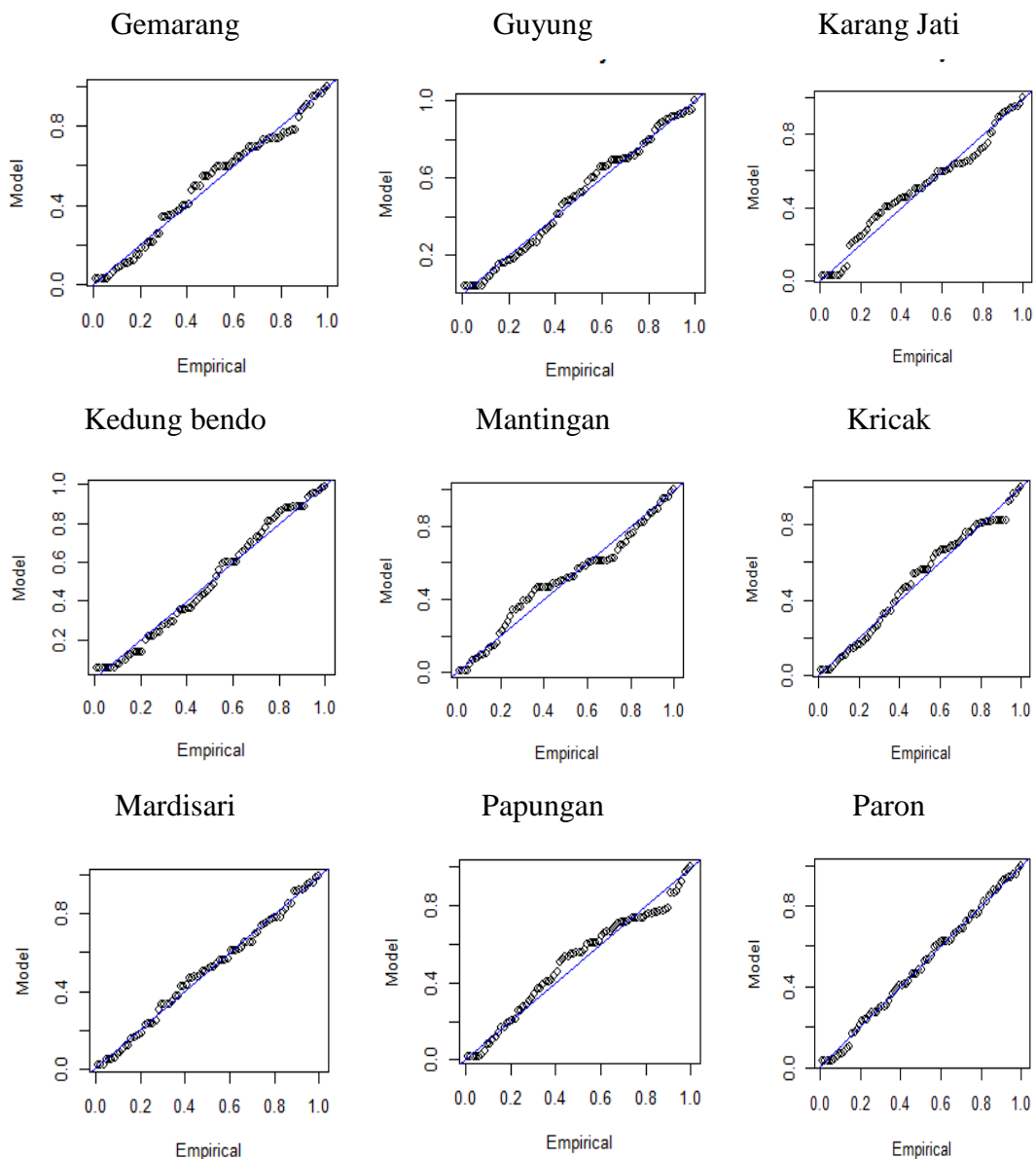
Data ekstrem yang diperoleh harus terlebih dahulu di uji apakah data ekstrem yang di ambil dari block maxima berdistribusi GEV. Pengujian dapat dilakukan dengan menggunakan *Probability plot* dan uji formal menggunakan uji Anderson Darling. Gambar 4.5 ditampilkan *Probability plot* dari pos Walikukun dengan blok/periode tiga bulan.



Gambar 4.5 Probability Plot Pos Walikukun

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa hampir semua titik sebaran mengikuti garis linear. Hal ini menunjukkan bahwa sampel ekstrem di Pos Walikukun telah mengikuti distribusi GEV.

Pola yang sama terlihat pada Gambar 4.6 bahwa hampir semua titik sebaran mengikuti garis linear dimana terjadi di Sembilan pos pemantau hujan lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa sampel ekstrem di ke sepuluh pos pemantau hujan Kabupaten Ngawi telah mengikuti distribusi GEV.



Gambar 4.6 Probability Plot seluruh pos pemantau hujan Kabupaten Ngawi

Selanjutnya agar lebih meyakinkan kesimpulan tersebut maka perlu dilakukan uji formal dengan menggunakan uji Anderson Darling. Dengan pengujian hipotesis sebagai berikut :

$H_0 : F(y) = F_0(y)$ (Distribusi dari sampel mengikuti distribusi GEV)

$H_1 : F(y) \neq F_0(y)$ (Distribusi dari sampel tidak mengikuti distribusi GEV)

Statistik uji yang digunakan yaitu pada persamaan 2.11. Dengan menggunakan tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$, tolak H_0 bila A_n^2 lebih besar dari A_{tabel}^2 dapat dilihat pada lampiran 4 atau dengan menggunakan kriteria P-value $< \alpha$.

Tabel 4.4 Uji Anderson Darling

Pos hujan	A^2	p-value	Keputusan
Gemarang/Sokongadirejo	0,6375	0,9392	Gagal tolak H_0
Guyung	0,4975	0,7981	Gagal tolak H_0
Legundi/Karangjati	1,2097	0,9994	Gagal tolak H_0
Kedungbendo	0,6811	0,9548	Gagal tolak H_0
Kedungharjo/Mantingan	0,9061	0,9949	Gagal tolak H_0
Kricak	0,6825	0,9556	Gagal tolak H_0
Jururejo/Mardiasri	0,2512	0,3247	Gagal tolak H_0
Ngancar/Papungan	1,1846	0,9992	Gagal tolak H_0
Paron	0,2618	0,3617	Gagal tolak H_0
Widodaren/Wali Kukun	1,9268	0,9999	Gagal tolak H_0

Tabel 4.4 menunjukkan hasil bahwa berdasarkan pengujian kesesuaian distribusi Anderson Darling sampel ekstrem dengan metode *block maxima* periode blok 3 bulanan menghasilkan keputusan gagal tolak H_0 yang artinya sudah mengikuti distribusi GEV.

4.2.6 Transformasi ke Margin Frechet

Setelah sampel ekstrem diperoleh dan telah di pastikan bahwa sampel mengikuti distribusi GEV, langkah selanjutnya adalah dengan mentransformasikan sampel ekstrem yang diperoleh kedalam margin Frechet. Transformasi dilakukan dengan menggunakan persamaan berikut dimana y adalah sampel ekstrem curah hujan, s_i menunjukkan lokasi stasiun pengamatan curah hujan ke- i dan $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ adalah nilai parameter GEV univariat yang diperoleh pada Tabel 4.3. Pada Tabel 4.5 akan ditampilkan data ekstrem dan hasil transformasinya pada salah satu lokasi yaitu pada pos Gemarang. Hasil

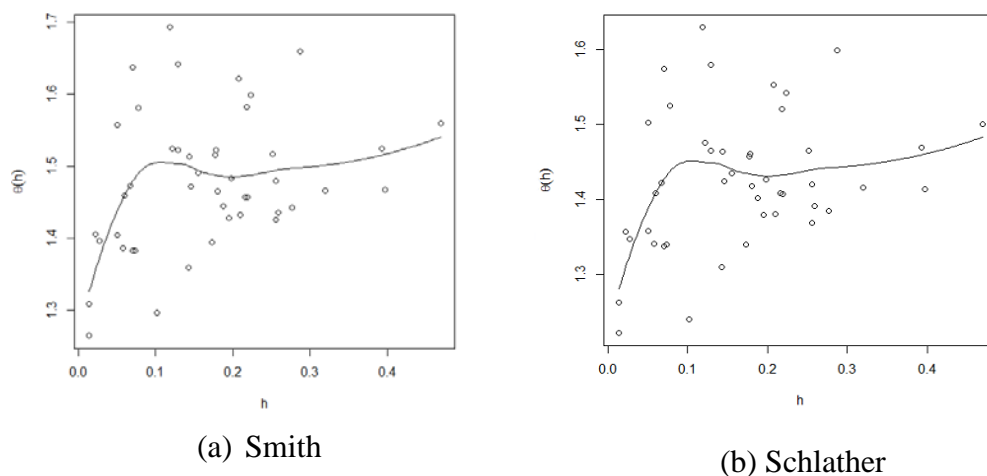
transformasi selengkapnya bisa dilihat pada Lampiran 5.

Tabel 4.5 Hasil Transformasi Pos Gemarang

Sampel Ekstrem	z
76	1,714
56	0,969
36	0,596
95	3,281
131	18,67
24	0,458
⋮	⋮
70	1,430

4.2.7 Dependensi Spasial dan Koefisien Eksternal Curah Hujan Ekstrem

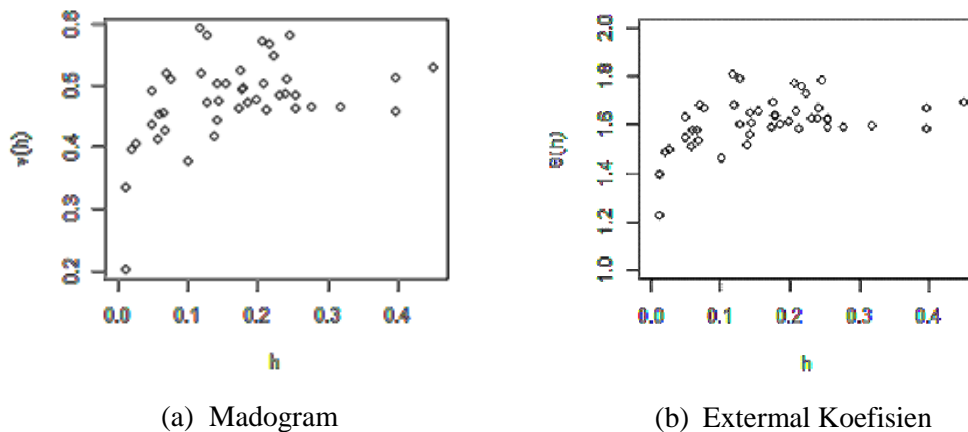
Pada tahap ini perlu dilakukan pengecekan ukuran dependensi spasial pada suatu lokasi lihat adalah ukuran dependensi spasial pada lokasi berdasarkan koefisien eksternal. Koefisien eksternal menggambarkan karakteristik metrik dari dependensi ekornya. Eksternal koefisien merupakan ukuran dependensi ekstremal multivariate untuk *max-stable process* yang dikemukakan oleh Smith (1990). Singkatnya koefisien ekstremal menggambarkan dependensi spasial ekstrem secara parsial atau bivariat (dua lokasi berpasangan). Nilai dependensi spasial pada penelitian ini, disajikan dalam bentuk grafik *extremal coefficient* dapat dilihat pada Gambar 4.5. Titik-titik yang terdapat pada grafik *extremal coefficient* menunjukkan adanya spasial lag atau jarak antara dua lokasi. Semakin jauh jaraknya, semakin besar kemungkinan adanya independensi.



Gambar 4.7 Estimasi Koefisien Eksternal Model Smith dan Schlather

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa titik-titik menyebar di sekitar nilai 1.3 hingga 1.6, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada dependensi spasial antar lokasi. Nilai $\theta(h)$ merupakan besaran nilai dependensi ekstremal antar lokasi yang berada pada kisaran 1 hingga 1.5. *Complete dependence* terjadi apabila $\theta(h)$ bernilai 1 maka dan bila bernilai 2 maka artinya *complete independence*. Bila dibandingkan antara plot Smith dan schlather, plot schlather lebih baik dalam menangkap adanya dependensi spasial.

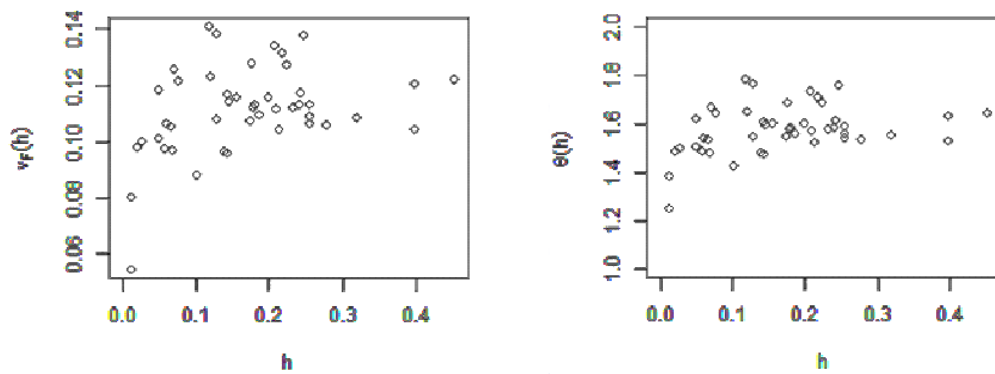
Selanjutnya perlu adanya melihat ukuran dependensi spasial antar titik yang mana dapat dilihat menggunakan semivarian. Konsep dari semivarian sendiri besarnya bergantung pada jarak antar titik yang disebut konsep jarak Euclid, jika jarak titik yang kecil maka akan menghasilkan semivarian yang kecil dan semakin besar jarak antar titik sampel maka akan menghasilkan semivarian yang semakin besar. Semivariogram berfungsi untuk mendeskripsikan keragaman antar lokasi pada data spasial. Pada penelitian ini, digunakan Mandogram, F-Mandogram.



Gambar 4.8 Madogram Pos Curah Hujan di Kabupaten Ngawi

Gambar 4.8 menunjukkan menunjukkan bahwa nilai dependensi ($\theta(h)$) antar lokasi independen karena nilai dependensi spasial berkisar antara 1.2 sampai 1.8. Mandogram (Gambar 4.8) menunjukkan pola yang mengikuti model ideal semivarian, yaitu model yang menunjukkan bahwa semakin meningkat jarak stasiun, semakin meningkat keragaman curah hujannya.

Gambar 4.9 F-Mandogram (b) menunjukkan nilai dependensi antar ($\theta(h)$) lokasi independen karena nilai dependensi spasial berkisar antara 1.2 sampai 1.8.



(a) Madogram

(b) External Koefisien

Gambar 4.9 F-Madogram Pos Curah Hujan di Kabupaten Ngawi

4.2.8 Estimasi Parameter GEV Spasial

Pada bagian ini estimasi parameter GEV Spasial dihitung untuk masing-masing parameter $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ dengan menggunakan model *trend surface* seperti contoh pada persamaan 2.32.

Model *trend surface* terbaik adalah kombinasi model 9 dengan komponen spasial garis lintang (*latitude*) dan bujur (*longitude*). *Longitude* dan *latitude* merupakan variabel geografis yang menunjukkan koordinat letak suatu lokasi, dalam hal ini berfungsi sebagai variabel penjelas seperti yang terdapat pada model-model regresi pada umumnya. Pada penelitian ini, model parameter GEV yang digunakan adalah semua kemungkinan model dengan kombinasi variabel *longitude* dan *latitude*. Pada Tabel 4.6 akan ditampilkan kombinasi 9 model yang terbaik.

Tabel 4.6 Model *Trend Surface* Terbaik

No	Model trendsurface	TIC
1	$\hat{\mu}(s) = 0,990 - 0,020 \text{ long}(s) + 0,004 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,992 - 0,0400 \text{ long}(s) + 0,008 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,023$	3505,082
2	$\hat{\mu}(s) = 0,99 - 0,022 \text{ long}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,992 - 0,042 \text{ long}(s) + 0,003 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,022$	3503,978
3	$\hat{\mu}(s) = 0,990 - 0,017 \text{ long}(s) - 0,004 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,993 - 0,044 \text{ long}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,022$	3503,882

Lanjutan Tabel 4.6

4	$\hat{\mu}(s) = 0,990 - 0,022 \text{ long}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,992 - 0,044 \text{ long}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,022$	3502,326
5	$\hat{\mu}(s) = 0,990 + 0,013 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,992 - 0,014 \text{ long}(s) + 0,021 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,022$	3503,824
6	$\hat{\mu}(s) = 0,990 + 0,008 \text{ long}(s) + 0,018 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,993 + 0,030 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,021$	3504,018
7	$\hat{\mu}(s) = 0,992 + 0,017 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,994 + 0,035 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,018$	3502,188
8	$\hat{\mu}(s) = 0,991 + 0,008 \text{ long}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,993 + 0,007 \text{ lat}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,020$	3503,003
9	$\hat{\mu}(s) = 0,990 - 0,00008 \text{ lat}(s)$ $\hat{\sigma}(s) = 0,992 - 0,017 \text{ long}(s)$ $\hat{\xi}(s) = 1,021$	3502,562

Tabel 4.6 menyajikan informasi sembilan kombinasi model terbaik serta nilai TIC, dimana pemilihan model terbaik berdasarkan kriteria nilai TIC terkecil. Berdasarkan sembilan kombinasi model terbaik model ke tujuh merupakan model yang paling baik karena memiliki nilai TIC terkecil sebesar 3502,188 dengan model berikut :

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(s) &= 0,992 + 0,017 \text{ lat}(s) \\ \hat{\sigma}(s) &= 0,994 + 0,035 \text{ lat}(s) \\ \hat{\xi}(s) &= 1,018\end{aligned}$$

4.2.9 Estimasi Parameter Spatial Extreme Value dengan Max-stable Proses

Pada tahap ini akan di cari estimasi parameter spatial extreme value yang akan diperoleh dengan menggunakan metode Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE) dikarenakan persamaan dari masing-masing parameter tidak close form, maka digunakan lah metode numerik yaitu Nelder-Mead. Estimasi

parameter yang didapatkan akan berupa $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ pada setiap stasiun. Beberapa model Max-Stable yang akan digunakan yaitu Model Smith, Model Schlather, Model Brown Resnick.

1. Model Smith

Dengan menggunakan metode optimasi Nelder –Mead dan model trend surface terbaik yang telah didapatkan. Model smith diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(s) &= 2,117 + 0,192 \text{ lat}(s) \\ \hat{\sigma}(s) &= 17,988 - 0,156 \text{ lat}(s) \\ \hat{\xi}(s) &= 1,021\end{aligned}$$

Tabel 4.7 Estimasi Parameter Model Smith

Pos pemantau hujan	$\hat{\mu}(s)$	$\hat{\sigma}(s)$	$\hat{\xi}(s)$
Gemarang/Sokongadirejo	0,6937	0,6058	1,0205
Guyung	0,6726	0,5989	1,0205
Legundi/Karangjati	0,6813	0,5673	1,0205
Kedungbendo	0,6955	0,5783	1,0205
Kedungharjo/Mantingan	0,6957	0,6396	1,0205
Kricak	0,6941	0,6092	1,0205
Jururejo/Mardiasri	0,6876	0,5996	1,0205
Ngancar/Papungan	0,6962	0,6053	1,0205
Paron	0,6858	0,6012	1,0205
Widodaren/Wali Kukun	0,6959	0,6281	1,0205

Tabel 4.7 didapatkan informasi tentang nilai estimasi parameter model Smith untuk semua pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi. Dengan parameter $\hat{\xi}(s)$ kontans untuk setiap lokasi.

2. Model Schlather

Pada model Schlather terdapat beberapa fungsi korelasi yang turut digunakan dalam model, ada empat fungsi korelasi yaitu *Whittle-Matern*, *Cauchy*, *Powered exponential*, dan *Bessel*. Fungsi korelasi yang digunakan dalam penelitian ini merupakan fungsi korelasi untuk data spasial yang didasarkan pada pengukuran jarak. Model *Schlather* dengan fungsi korelasi yang terbaik dipilih menggunakan *Takeuchi Information Criterion* (TIC). Tabel 4.8 menampilkan parameter dependensi model Schlather dengan empat macam fungsi korelasi dan

nilai TIC. Fungsi korelasi *Powered exponential* memiliki nilai TIC tertinggi yaitu sebesar 30588,44 dan fungsi korelasi *Cauchy* memiliki nilai TIC terkecil yaitu sebesar 30582,71. Nilai NA menunjukkan nilai TIC tidak dapat dihitung.

Tabel 4.8 Parameter Dependensi Model Schlather

	nugget	range	smooth	TIC
<i>Whittle-Matern</i>	0,01394	0,16831	0,26892	30585,63
<i>Cauchy</i>	0,17140	0,02261	0,33393	30582,71
<i>Powered exponential</i>	0,0000000131	0,08474	0,7584	30588,44
<i>Bessel</i>	0,02635	1,04956	141,05024	NA

Selanjutnya fungsi korelasi Cauchy digunakan untuk menentukan estimasi parameter model Schlather dengan menggunakan metode optimasi Nelder –Mead dan model trend surface terbaik yang telah didapatkan. Model Schlather diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(s) &= 2,118 + 0,154 \text{ lat}(s) \\ \hat{\sigma}(s) &= 12,984 - 0,107 \text{ lat}(s) \\ \hat{\xi}(s) &= 1,122\end{aligned}$$

Nilai estimasi parameter model Smith tersaji pada Tabel 4.9 dimana untuk setiap pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi memiliki nilai parameter $\hat{\mu}(s)$ dan $\hat{\sigma}(s)$ yang berbeda-beda sedangkan parameter bernilai $\hat{\xi}(s)$ konstan positif.

Tabel 4.9 Estimasi Parameter Model Schlather

Pos pemantau hujan	$\hat{\mu}(s)$	$\hat{\sigma}(s)$	$\hat{\xi}(s)$
Gemarang/Sokongadirejo	0,9803	1,0095	1,1217
Guyung	0,9634	1,0047	1,1217
Legundi/Karangjati	0,9704	0,9829	1,1217
Kedungbendo	0,9817	0,9905	1,1217
Kedungharjo/Mantingan	0,9819	1,0327	1,1217
Kricak	0,9806	1,0118	1,1217
Jururejo/Mardiasri	0,9754	1,0052	1,1217
Ngancar/Papungan	0,9823	1,0091	1,1217
Paron	0,974	1,0063	1,1217
Widodaren/Wali Kukun	0,982	1,0248	1,1217

3. Model Brown Resnick

Dengan menggunakan metode optimasi Nelder –Mead dan model trend surface terbaik yang telah didapatkan. Brown Resnick diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{\mu}(s) = 2,205 - 0,167 \text{ lat}(s)$$

$$\hat{\sigma}(s) = 17,074 - 0,143 \text{ lat}(s)$$

$$\hat{\xi}(s) = 1,318$$

Nilai estimasi parameter model Brown Resnick untuk semua pos pemantau hujan di Kabupaten Ngawi disajikan Tabel 4.10. Nilai parameter $\hat{\mu}(s)$ dan $\hat{\sigma}(s)$ yang berdeda-beda pada setiap pos sedangkan parameter $\hat{\xi}(s)$ bernilai konstan positif.

Tabel 4.10 Estimasi Parameter Model Brown Resnick

Pos pemantau hujan	$\hat{\mu}(s)$	$\hat{\sigma}(s)$	$\hat{\xi}(s)$
Gemarang/Sokongadirejo	0,968	1,0931	1,318
Guyung	0,9497	1,0868	1,318
Legundi/Karangjati	0,9572	1,0577	1,318
Kedungbendo	0,9695	1,0678	1,318
Kedungharjo/Mantingan	0,9697	1,1242	1,318
Kricak	0,9683	1,0963	1,318
Jururejo/Mardiasri	0,9627	1,0874	1,318
Ngancar/Papungan	0,9701	1,0927	1,318
Paron	0,9611	1,0889	1,318
Widodaren/Wali Kukun	0,9699	1,1136	1,318

4.2.10 Return Level model Smith, Schlater, Brown resnick

Return level merupakan nilai estimasi curah hujan ekstrem pada periode waktu tertentu. Nilai estimasi parameter $\hat{\mu}(s), \hat{\sigma}(s), \hat{\xi}(s)$ pada setiap model, kemudian digunakan untuk menghitung prediksi return level curah hujan ekstrem pada sepuluh pos di Kabupaten Ngawi. Akan di hitung prediksi selama 2, 4, 8 dan 10 tahun kedepan, dengan menggunakan persamaan 2.42. Dimana misal $T = 2 \text{ tahun} \times 4 (\text{banyak blok}) = 8$. Hasil prediksi disajikan pada Tabel 4.11, 4.12, 4.13 yang merupakan prediksi return level model Smith, Schlather dan Brown resnick.

Tabel 4.11 Return Level Model Smith

Pos pemantau hujan	2 tahun (mm)	4 tahun (mm)	8 tahun (mm)	10 tahun (mm)
Gemarang/Sokongadirejo	104,213	119,832	132,207	135,639
Guyung	108,105	118,332	125	126,622
Legundi/Karangjati	106,828	126,823	144,017	149,049
Kedungbendo	86,1255	100,658	112,218	115,428
Kedungharjo/Mantingan	109,506	134,299	157,146	164,157
Kricak	96,1857	110,654	122,15	125,344
Jururejo/Mardiasri	108,116	124,105	136,948	140,542
Ngancar/Papungan	104,968	123,172	138,75	143,298
Paron	103,229	119,692	132,943	136,658
Widodaren/Wali Kukun	110,442	132,026	152,07	158,25

Tabel 4.12 Return Level Model Schlather

Pos pemantau hujan	2 tahun (mm)	4 tahun (mm)	8 tahun (mm)	10 tahun (mm)
Gemarang/Sokongadirejo	117,433	131,719	142,732	145,736
Guyung	116,974	124,814	129,69	130,84
Legundi/Karangjati	124,609	144,169	160,636	165,398
Kedungbendo	98,8998	112,151	122,384	125,177
Kedungharjo/Mantingan	129,25	155,228	178,955	186,199
Kricak	108,372	121,65	131,921	134,728
Jururejo/Mardiasri	121,753	136,535	148,103	151,29
Ngancar/Papungan	120,291	138,122	153,088	157,408
Paron	117,239	132,492	144,46	147,763
Widodaren/Wali Kukun	127,901	150,658	171,601	178,027

Tabel 4.13 Return Level Model Brown Resnick

Pos pemantau hujan	2 tahun (mm)	4 tahun (mm)	8 tahun (mm)	10 tahun (mm)
Gemarang/Sokongadirejo	123,417	138,374	149,445	152,382
Guyung	120,453	127,877	132,149	133,104
Legundi/Karangjati	132,448	153,821	171,364	176,349
Kedungbendo	104,379	118,278	128,585	131,32
Kedungharjo/Mantingan	139,756	169,234	195,868	203,938
Kricak	113,937	127,858	138,205	140,957
Jururejo/Mardiasri	127,9	143,49	155,237	158,39
Ngancar/Papungan	127,574	147,013	162,912	167,42
Paron	123,582	139,688	151,861	155,136
Widodaren/Wali Kukun	137,037	162,957	186,586	193,786

Tabel 4.11, 4.12, 4.13 menunjukkan bahwa curah hujan meningkat dari tahun ketahun berdasarkan ketiga model. Pada prediksi periode 2, 4, 8 dan 10 tahun

kedepan model Brown-Resnick diperkirakan bahwa ambang batas maksimum curah hujan pada pos Kedungharjo/Mantingan yaitu berturut-turut sebesar 139, 756 mm, 169,234 mm, 195,868 mm dan 203,938 mm dengan Peluang terlampaui minimal sekali berturut-turut adalah 0,125, 0,0625, 0,031, 0,025.

Sedangkan prediksi menggunakan model Smith pada pos Kedungharjo/Mantingan adalah berturut-turut sebesar 109,506 mm, 134,299 mm, 157,146 mm, 164,157 mm dan dengan model Schlather adalah berturut-turut sebesar 129,25 mm, 155,228 mm, 178,955 mm, 203,938 mm dengan periode 2, 4, 8 dan 10 tahun kedepan dan Peluang terlampaui berturut-turut adalah 0,125, 0,0625, 0,031, 0,025.

Nilai return level yang dihasilkan oleh model Brown-Resnick, Smith dan Schlather terdapat perbedaan, dimana model Brown-Resnick memiliki nilai yang lebih besar dari dua model lainnya.

4.2.11 Tingkat Kesalahan Ramalan

Prediksi nilai *return level* untuk curah hujan selama 4 tahun 2012-2015 ($\hat{y}(s_i)$) dari masing-masing model di sepuluh pos pemantau hujan dan nilai aktual curah hujan maksimal pada periode yang sama 2012-2015 ($y(s_i)$) akan disajikan pada Tabel 4.14. Besaran eror atau kesalahan prediksi akan dapat dihitung berdasarkan variabel prediksi dan aktual curah hujan, lalu RMSE dapat dihitung berdasarkan lokasi dengan menggunakan persamaan 2.32.

Tabel 4.14 memberikan informasi mengenai error hasil prediksi curah hujan ekstrem yang dihitung berdasarkan curah hujan aktual. Terdapat juga nilai RMSE dari masing-masing model yaitu model Smith sebesar 25,317, Schlather sebesar 29,3761, model Brown Resnick sebesar 33,477. Bila dibandingkan diantara ketiga model tersebut model Smith dianggap yang paling bagus untuk hasil prediksi dikarenakan memiliki nilai RMSE yang terkecil dibandingkan dengan dua model lainnya

Tabel 4.14 Prediksi Return Level periode ulang 4 tahun (T=16) dan Nilai Kesalahan Ramalan

Pos pemantau hujan	Aktual ($y(s_i)$)	Prediksi ($\hat{y}(s_i)$)			Error Smith	Error Schlather	Error Brown resnick
		Smith	Schlather	Brown resnick			
Gemarang/ Sokongadirejo	95	119,832	131,719	138,374	-24,832	-36,719	-43,374
Guyung	130	118,332	124,814	127,877	11,668	51,864	21,235
Legundi/Karangjati	85	126,823	144,169	153,821	-41,823	-59,169	-68,821
Kedungbendo	99	100,658	112,151	118,278	-1,658	-13,151	-19,278
Kedungharjo/ Mantingan	155	134,299	155,228	169,234	20,701	-0,2284	-14,234
Kricak	89	110,654	121,65	127,858	-21,654	-32,65	-38,858
Jururejo/Mardiasri	135	124,105	136,535	143,49	10,895	-15,347	-84,904
Ngancar/Papungan	98	123,172	138,122	147,013	-25,172	-40,122	-49,013
Paron	190	119,692	132,492	139,688	70,308	57,508	50,312
Widodaren/ Wali Kukun	98	132,026	150,658	162,957	-34,026	-52,658	-64,957
RMSE					25,317	293,761	33,477

Tabel 4.15 Return Level model Smith, Schlather, dan Brown-resnick dan peluang terlampaui periode ulang 4 tahun (T=16).

Pos pemantau hujan	Smith	P_{rl}	Schlather	P_{rl}	Brown resnick	P_{rl}
Gemarang/Sokongadirejo	119,832	0	131,719	0	138,374	0
Guyung	118,332	0.25	124,814	0.125	127,877	0.125
Legundi/Karangjati	126,823	0	144,169	0	153,821	0
Kedungbendo	100,658	0	112,151	0	118,278	0
Kedungharjo/Mantingan	134,299	0	155,228	0	169,234	0
Kricak	110,654	0	121,65	0	127,858	0
Jururejo/Mardiasri	124,105	0.125	136,535	0	143,49	0
Ngancar/Papungan	123,172	0	138,122	0	147,013	0
Paron	119,692	0.125	132,492	0.0625	139,688	0.0625
Widodaren/Wali Kukun	132,026	0	150,658	0	162,957	0

Tabel 4.15 menunjukan bahwa dalam kurun waktu 4 tahun (T=16) dengan

$p = \frac{1}{16} = 0,0625$, peluang curah hujan dari data testing yang melewati prediksi

return level berdasarkan dinyatakan dalam P_{rl} . Cara menghitung P_{rl} yaitu dengan menghitung banyaknya nilai curah hujan setiap blok dalam periode 4 tahun yang

melewati nilai prediksi return level kemudian dibagi banyaknya blok atau periode. Pos Paron dengan menggunakan model Scholter dan Brown-resnick memiliki P_{rl} sebesar 0.0625 yang artinya $P_{rl} \approx P$, bahwa kedua model tersebut yang paling tepat memprediksi curah hujan ekstrem untuk lokasi tersebut. Terlihat juga pada Tabel 4.15 pos guyung memiliki $P_{rl} > P$ untuk Smith sebesar 0,25, Schlather dan Brown-resnick sebesar 0.125. Pos Jujurejo/Mantingan dan paron memiliki P_{rl} sebesar 0,25 untuk model Smith. Sedangkan untuk P_{rl} sebesar 0 artinya tidak ada dari data testing yang melampaui prediksi return level.

Lampiran 1 Data Curah Hujan Harian (mm) Kabupaten Ngawi Tahun 1991-2015

Tahun	Bulan	Hari	Gemarang	Guyung	Mardisari	mantingan	Kedung Bendo
1991	12	1	29	0	0	0	0
1991	12	2	36	0	0	11	2
1991	12	3	18	47	0	25	19
1991	12	4	6	11	0	11	4
1991	12	5	8	0	24	0	6
1991	12	6	24	10	0	34	3
1991	12	7	5	61	0	10	5
1991	12	8	8	4	0	25	6
1991	12	9	19	76	30	0	40
1991	12	10	9	61	8	18	35
1991	12	11	0	0	0	20	0
1991	12	12	0	23	0	5	12
1991	12	13	0	0	0	0	0
1991	12	14	0	0	0	0	0
1991	12	15	0	3	0	6	0
1991	12	16	0	0	0	0	0
1991	12	17	0	0	0	0	0
1991	12	18	0	0	0	0	0
...
...
...
2015	12	19	6	0	0	0	12
2015	12	20	14	0	0	0	0
2015	12	21	0	42	25	15	0
2015	12	22	13	0	0	0	0
2015	12	23	0	0	0	0	0
2015	12	24	6	0	0	0	12
2015	12	25	7	0	0	0	55
2015	12	26	25	0	0	0	0
2015	12	27	16	0	0	14	0
2015	12	28	1	24	35	0	0
2015	12	29	31	13	0	0	0
2015	12	30	34	12	14	16	12
2015	12	31	44	0	14	40	0

Tahun	Bulan	Hari	Kricak	Karangjati	Papungan	Paron	Walikukun
1991	12	1	0	0	7.1	0	0
1991	12	2	11	0	10.2	6	29
1991	12	3	27	26	11.8	37	17
1991	12	4	4	2	8.9	31	0
1991	12	5	0	14	8.4	2	0
1991	12	6	54	0	2.6	5	41
1991	12	7	14	2	8.8	32	25
1991	12	8	6	0	4.5	0	6
1991	12	9	39	29	9.7	20	9
1991	12	10	11	14	12.1	40	30
1991	12	11	5	0	8.6	0	0
1991	12	12	4	2	5.8	7	0
1991	12	13	0	0	7.9	0	0
1991	12	14	0	0	8.3	0	27
1991	12	15	29	26	13.6	1	0
1991	12	16	0	0	2	0	0
1991	12	17	0	0	6.6	0	0
1991	12	18	0	0	7.1	0	0
...
...
...
2015	12	19	10	11	3	0	0
2015	12	20	3	0	5	0	0
2015	12	21	0	0	6	22	0
2015	12	22	15	0	12	0	0
2015	12	23	6	0	0	0	0
2015	12	24	0	0	9	0	0
2015	12	25	0	27	1	0	0
2015	12	26	11	0	12	0	0
2015	12	27	8	0	31	0	0
2015	12	28	49	0	14	0	0
2015	12	29	35	36	35	0	0
2015	12	30	26	0	41	16	0
2015	12	31	39	0	51	13	0

Lampiran 2. Data Curah Hujan Ekstrem (mm) Periode Tiga Bulan Kabupaten Ngawi Tahun 1991-2011.

Obs	Gemarang	Guyung	Mardisari	Mantingan	Kedung Bendo
1	76	82	115	92	43
2	56	94	46	105	58
3	36	0	39	45	35
4	95	19.9	85	69	34
5	131	89	128	121	45
6	24	71	47	71	9
7	75	53	58	55	43
8	23	27	12	26	5
9	61	97	75	67	129
10	82	136	81	59	36
11	5	0	0	22	0
12	55	51	62	32	42
13	109	47	73	121	53
14	85	112	78	53	65
15	135	40	47	21	17
16	90	78	62	115	42
17	115	94	94	82	65
18	137	117	162	77	35
19	23	36	26	69	17
20	99	107	67	42	25
21	120	37	130	153	36
22	100	87	71	71	28
23	98	0	58	31	10
24	55	76	37	67	17
25	132	97	99	97	65
26	58	0	48	65	30
27	70	0	55	65	30
28	86	54	75	80	68
29	94	106	103	150	73
30	68	98	58	150	78
31	30	82	40	180	28
32	98	97	77	65	87
33	118	71	105	108	49

Obs	Gemarang	Guyung	Mardisari	Mantingan	Kedung Bendo
34	92	80	90	240	108
35	30	97	36	30	65
36	80	37	90	77	78
37	120	89	80	65	118
38	95	94	100	125	114
39	54	41	72	109	97
40	149	77	90	65	97
41	90	66	105	90	115
42	80	65	58	47	80
43	17	43	0	0	0
44	90	57	76	82	50
45	90	125	131	79	75
46	80	49	108	79	40
47	0	54	0	15	5
48	13.6	98	101	58	91
49	57	95	86	100	61
50	94	39	158	80	54
51	0	29	12	25	0
52	19	0	23	25	0
53	100	124	128	98	83
54	60	121	71	53	98
55	95	98	38	40	17
56	54	99	104	20	89
57	95	116	130	80	94
58	25	101	59	70	97
59	0	0	12	0	0
60	60	47	21	50	14
61	75	60	80	80	51
62	96	122	68	110	48
63	0	80	30	0	13
64	36	62	90	70	46
65	160	101	115	75	125
66	45	107	67	80	87
67	0	63	47	80	0
68	45	122	105	55	71
69	40	105	85	81	111
70	85	91	138	75	70

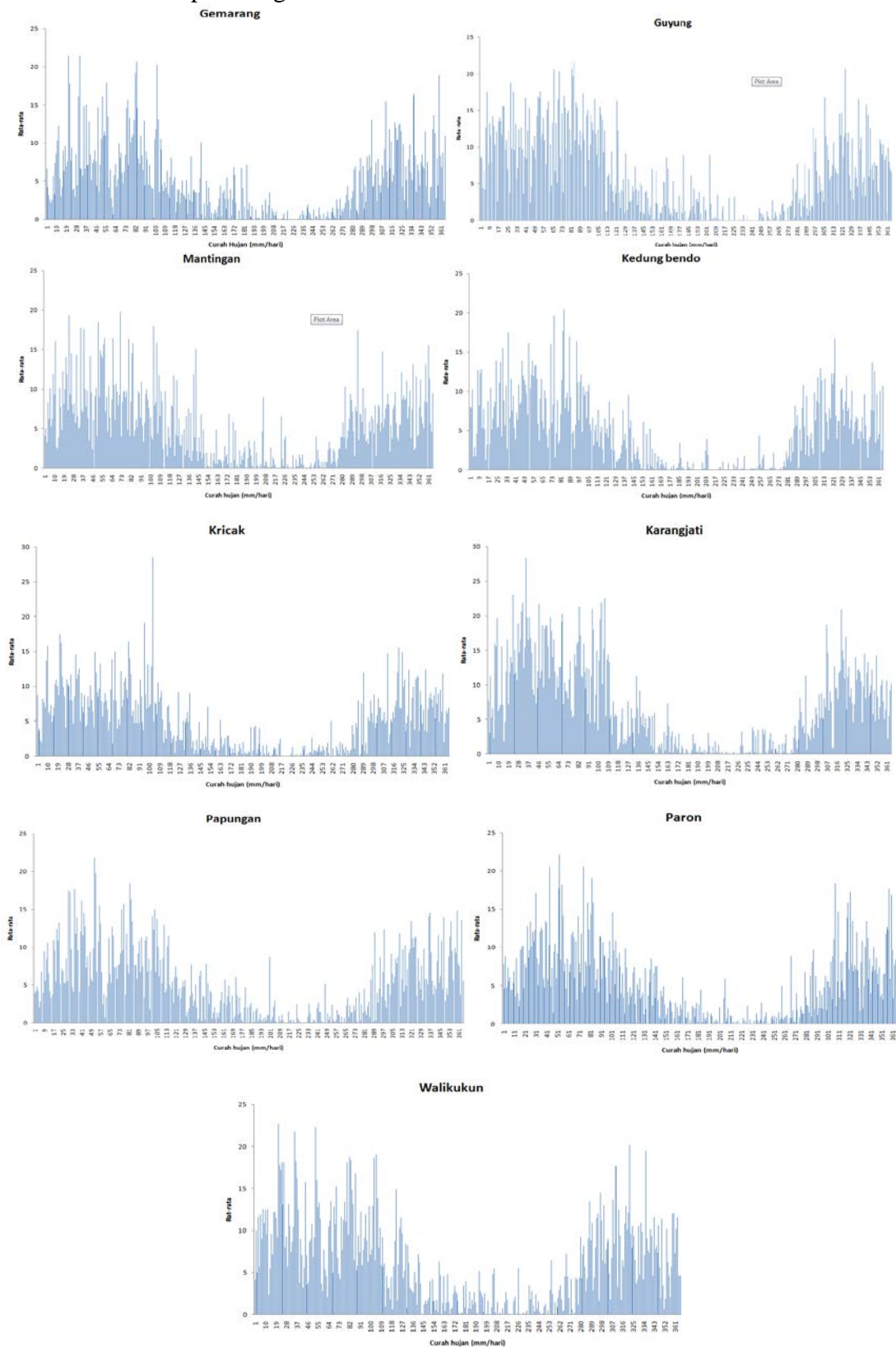
Obs	Gemarang	Guyung	Mardisari	Mantingan	Kedung Bendo
71	20	10	15	0	65
72	40	120	72	58	28
73	78	118	110	61	64
74	80	118	140	90	99
75	40	18	87	34	42
76	87	120	77	138	95
77	75	83	95	87	98
78	70	78	141	64	99
79	82	99	30	65	0
80	80	124	80	68	75
81	70	114	85	126	98

Obs	Gemarang	Kricak	Karangjati	Papungan	Paron	Walikukun
1	76	96	87	75	118	75
2	56	69	96	80	67	87
3	36	34	51	50	55	61
4	95	98	70	75	81	81
5	131	87	126	92	122	103
6	24	70	60	21	59	39
7	75	50	54	70	48	56
8	23	27	6	12	11	34
9	61	63	153	93	81	85
10	82	54	90	96	72	62
11	5	0	0	0	0	12
12	55	55	42	88	80	39
13	109	98	108	97	81	83
14	85	96	126	86	47	71
15	135	81	54	40	37	20
16	90	138	97	59	40	85
17	115	95	95	100	59	55
18	137	125	44	150	150	57
19	23	12	46	47	31	35
20	99	61	62	45	85	113
21	120	85	76	193	127	282
22	100	78	37	95	86	62
23	98	41	12	30	56	15

Obs	Gemarang	Kricak	Karangjati	Papungan	Paron	Walikukun
24	55	45	42	45	41	58
25	132	116	118	116	96	88
26	58	82	145	71	49	63
27	70	82	145	122	72	96
28	86	97	70	80	115	94
29	94	90	67	81	92	96
30	68	80	92	79	60	112
31	30	6	35	20	45	108
32	98	84	201	84	65	110
33	118	115	81	65	111	108
34	92	98	107	60	93	80
35	30	18	67	35	51	30
36	80	90	131	60	110	109
37	120	62	141	92	41	115
38	95	80	87	75	45	112
39	54	97	61	37	0	0
40	149	37	136	101	0	85
41	90	125	143	76	0	117
42	80	49	85	52	45	112
43	17	0	0	0	0	0
44	90	98	73	115	78	76
45	90	98	89	115	133	98
46	80	68	39	63	105	75
47	0	27	16	39	3	8
48	13.6	97	60	91	97	64
49	57	90	60	74	87	70
50	94	20	56	95	161	77
51	0	40	0	0	8	65
52	19	0	0	38	20	43
53	100	92	76	99	126	95
54	60	95	135	98	74	84
55	95	49	65	95	34	58
56	54	62	65	54	101	57
57	95	70	100	95	129	57
58	25	80	80	57	58	70

Obs	Gemarang	Kricak	Karangjati	Papungan	Paron	Walikukun
59	0	0	0	0	14	0
60	60	15	0	48	18	56
61	75	50	80	73	79	91
62	96	60	63	98	65	112
63	0	0	40	4	32	47
64	36	76	50	74	88	65
65	160	150	70	163	115	85
66	45	32	65	61	67	90
67	0	25	0	0	48	110
68	45	28	80	57	105	92
69	40	73	80	80	71	90
70	85	98	85	128	81	140
71	20	21	85	25	12	50
72	40	42	70	27	61	80
73	78	70	85	89	96	96
74	80	70	86	95	130	97
75	40	30	56	35	60	46
76	87	68	82	97	65	80
77	75	35	84	86	96	90
78	70	79	74	73	135	50
79	82	30	0	92	43	56
80	80	83	64	85	88	94
81	70	58	72	99	82	90

Lampiran 3 Histogram Curah Hujan Berdasarkan Hari Sembilan Pos Pemantau Hujan di Kabupaten Ngawi.



Lampiran 4 Tabel Anderson Darling A_{tabel}^2

n	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
10	1,2419	1,6277	1,9518	2,5121	3,099	3,9083	4,5175	5,9897
20	1,25	1,629	1,9385	2,502	3,0731	3,8995	4,5117	5,9852
30	1,2457	1,621	1,9313	2,513	3,1111	3,9673	4,5309	5,8924
40	1,245	1,6173	1,9362	2,5042	3,1047	3,9397	4,5889	6,1275
50	1,2425	1,6163	1,9277	2,4941	3,0933	3,92	4,5211	5,9437
60	1,2464	1,6225	1,9367	2,5044	3,0776	3,9234	4,4858	6,0808
70	1,2515	1,6245	1,9304	2,4959	3,0889	3,8673	4,5326	5,9428
80	1,2384	1,6148	1,9235	2,4951	3,0778	3,8458	4,4808	5,9249
90	1,2461	1,6177	1,9326	2,5064	3,102	3,9239	4,5856	6,0412
100	1,2399	1,6235	1,9325	2,4901	3,0655	3,8319	4,4068	5,8987
mean	1,2453	1,6211	1,9355	2,4986	3,0916	3,9033	4,5416	6,0266

Lampiran 5 Hasil Transformasi Sampel Ekstrem Ke Margin Frechet

z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10
1,714	1,548	2,368	0,984	6,164	4,716	6,304	1,713	8,982	1,591
0,969	2,366	3,128	1,555	1,475	1,656	0,676	2,003	1,379	2,302
0,596	0,315	0,883	0,789	2,075	0,607	0,573	0,836	0,993	1,048
3,281	0,415	1,452	0,768	0,934	5,171	2,009	1,713	2,111	1,911
18,67	1,958	8,946	1,042	3,294	3,207	11,92	2,975	10,95	3,828
0,458	1,128	1,111	0,42	1,201	1,713	0,692	0,405	1,104	0,558
1,662	0,741	0,952	0,984	1,636	0,926	0,914	1,472	0,83	0,905
0,449	0,463	0,318	0,384	0,474	0,512	0,323	0,329	0,365	0,485
1,108	2,679	28,71	80,02	2,309	1,364	1,47	3,079	2,111	2,163
2,076	441,5	2,594	0,81	2,372	1,038	1,767	3,418	1,597	1,079
0,315	0,315	0,282	0,346	0,306	0,285	0,258	0,253	0,295	0,268
0,944	0,711	0,708	0,956	0,56	1,069	1,016	2,599	2,044	0,558
5,825	0,657	4,646	1,326	3,581	5,171	1,385	3,541	2,111	2,033
2,295	5,959	8,946	1,971	3,032	4,716	1,61	2,432	0,81	1,41
24,29	0,576	0,952	0,503	0,679	2,536	0,692	0,643	0,637	0,331
2,731	1,37	3,229	0,956	3,581	76,97	1,016	1,07	0,684	2,163
7,706	2,366	3,031	1,971	1,594	4,509	2,729	3,942	1,104	0,88
27,94	8,657	0,743	0,789	5,486	24,88	152,8	36,31	66,61	0,932
0,449	0,537	0,78	0,503	1,058	0,365	0,43	0,772	0,556	0,499
3,828	4,378	1,171	0,61	0,306	1,281	1,166	0,732	2,408	5,316
9,917	0,547	1,717	0,81	1,087	2,96	13,3	877,2	14,24	8239
3,983	1,825	0,629	0,658	1,916	2,268	1,307	3,3	2,49	1,079
3,681	0,315	0,361	0,429	0,631	0,725	0,914	0,502	1,019	0,29
0,944	1,293	0,708	0,503	0,646	0,807	0,548	0,732	0,7	0,96
19,9	2,679	6,619	1,971	2,504	13,55	3,275	7,278	3,549	2,375
1,022	0,315	19,77	0,692	1,77	2,634	0,71	1,517	0,851	1,111
1,43	0,315	19,77	0,692	1,77	2,634	0,845	9,344	1,597	3,057
2,375	0,757	1,452	2,193	1,201	4,937	1,47	2,003	7,797	2,868
3,16	4,141	1,338	2,642	2,372	3,63	3,815	2,068	3,067	3,057
1,349	2,798	2,759	3,217	2,644	2,442	0,914	1,941	1,134	5,143
0,521	1,548	0,6	0,658	0,934	0,322	0,587	0,395	0,771	4,507
3,681	2,679	609,6	4,735	2,131	2,846	1,561	2,278	1,303	4,813
8,945	1,128	1,982	1,173	7,357	12,74	4,129	1,27	6,51	4,507
2,935	1,455	4,49	14,58	0,867	5,171	2,374	1,101	3,179	1,853
0,521	2,679	1,338	1,971	0,825	0,417	0,535	0,567	0,895	0,435
1,945	0,547	10,9	3,217	0,306	3,63	2,374	1,101	6,231	4,657
9,917	1,958	16,56	29,52	2,372	1,321	1,712	2,975	0,7	5,683
3,281	2,366	2,368	21,87	1,141	2,442	3,4	1,713	0,771	5,143
0,92	0,587	1,141	7,723	0,306	4,937	1,345	0,596	0,295	0,195
75,1	1,331	13,38	7,723	2,504	0,654	2,374	4,088	0,295	2,163

2,731	0,994	18,08	23,51	5,648	24,88	4,129	1,767	0,295	6,077
1,945	0,97	2,23	3,492	6,164	0,9	0,914	0,882	0,771	5,143
0,397	0,609	0,282	0,346	0,306	0,285	0,258	0,253	0,295	0,195
2,731	0,807	1,578	1,209	0,805	5,171	1,515	6,989	1,919	1,64
2,731	19,93	2,516	2,854	1,724	5,171	14,06	6,989	20,08	3,259
1,945	0,683	0,659	0,904	1,594	1,602	4,664	1,199	5,045	1,591
0,287	0,757	0,393	0,384	0,306	0,512	0,258	0,627	0,312	0,241
0,371	2,798	1,111	5,71	0,534	4,937	3,532	2,875	3,685	1,145
0,995	2,464	1,111	1,718	0,805	3,63	2,076	1,662	2,576	1,369
3,16	0,566	1,002	1,368	1,817	0,436	101,1	3,3	192,4	1,691
0,287	0,478	0,282	0,346	0,306	0,707	0,323	0,253	0,344	1,179
0,414	0,315	0,282	0,346	0,313	0,285	0,404	0,611	0,438	0,624
3,983	17,53	1,717	3,966	30,42	3,952	11,92	3,803	13,49	2,961
1,078	12,51	12,83	8,143	12,72	4,509	1,307	3,669	1,696	2,097
3,281	2,798	1,268	0,503	0,646	0,9	0,56	3,3	0,595	0,96
0,92	2,926	1,268	5,193	2,075	1,321	3,968	0,931	4,297	0,932
3,281	7,981	3,557	6,618	2,644	1,713	13,3	3,3	15,91	0,932
0,468	3,209	1,926	7,723	28,45	2,442	0,938	1,012	1,075	1,369
0,287	0,315	0,282	0,346	0,306	0,285	0,323	0,253	0,387	0,195
1,078	0,657	0,282	0,47	1,264	0,39	0,388	0,792	0,42	0,905
1,662	0,863	1,926	1,246	7,579	0,926	1,712	1,612	1,98	2,609
3,407	13,9	1,202	1,138	3,032	1,242	1,199	3,669	1,303	5,143
0,287	1,455	0,675	0,459	0,306	0,285	0,469	0,276	0,568	0,699
0,596	0,903	0,861	1,073	2,248	2,11	2,374	1,662	2,666	1,179
266,2	3,209	1,452	53,759	88,12	357,5	6,304	78,81	7,797	2,163
0,735	4,378	1,268	4,735	20,48	0,578	1,166	1,132	1,379	2,528
0,287	0,924	0,282	0,346	0,394	0,489	0,692	0,253	0,83	4,813
0,735	13,9	1,926	2,449	1,866	0,524	4,129	1,012	5,045	2,692
0,653	3,923	1,926	17,75	2,95	1,898	2,009	2,003	1,55	2,528
2,295	2,107	2,230	2,36	2,02	5,171	21,32	12,15	2,111	13,48
0,422	0,36	2,230	1,971	0,712	0,446	0,343	0,445	0,372	0,762
0,653	11,33	1,452	0,658	1,264	0,745	1,345	0,466	1,166	1,853
1,825	9,426	2,23	1,903	11,24	1,713	5,07	2,687	3,549	3,057
1,945	9,426	2,298	8,595	3,032	1,713	24,25	3,3	16,84	3,156
0,653	0,403	1,002	0,956	0,547	0,55	2,145	0,567	1,134	0,679
2,458	11,33	2,041	6,962	3,482	1,602	1,561	3,541	1,303	1,853
1,662	1,597	2,165	8,143	3,482	0,622	2,828	2,432	3,549	2,528
1,43	1,37	1,623	8,595	28,45	2,353	25,9	1,612	22,69	0,762
2,076	2,926	0,282	0,346	1,232	0,55	0,469	2,975	0,734	0,905
1,945	17,53	1,235	2,854	1,817	2,738	1,712	2,354	2,666	2,868
1,43	6,855	1,535	8,143	1,171	1,169	2,009	3,803	2,181	2,528

Lampiran 6 Output Estimasi Parameter GEV Univariat

1. Pos Gemarang/Sokongadirejo

```
Response variable: gemarang

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

Likelihood ratio statistic is 11,29476 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0,0007772598

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                MLE Stand. Err.
MU: (identity)    57,18313      4,60527
SIGMA: (identity) 37,79880      3,25929
Xi: (identity)    -0,29803      0,06652
```

2. Guyung

```
Response variable: guyung

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 31,92871 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 1,599357e-08

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                MLE Stand. Err.
MU: (identity)    66,26428      4,83623
SIGMA: (identity) 40,65674      3,82480
Xi: (identity)    -0,56425      0,06449
```

3. Legundi/Karangjati

```
Response variable: karangjati

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 6,585455 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0,01028153

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      55,92332      4,73450
SIGMA: (identity) 39,07293      3,23983
Xi: (identity)     -0,18936      0,05737
```

4. Kedungbendo

```
Response variable: kedungbendo

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 5,849293 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.01558331

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      43,56881      4,47516
SIGMA: (identity) 34,88528      3,40366
Xi: (identity)     -0,29744      0,10396
```


5. Kedungharjo/ Mantingan

```
Response variable: mantingan

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 1,476903 < 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0,2242597

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                MLE Stand. Err.
MU: (identity)    55,74868      4.29056
SIGMA: (identity) 35,30380      2,95440
Xi: (identity)    -0,07952      0,05816
```

6. Kricak

```
Response variable: kricak

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 11,31665 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.0007681516

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                MLE Stand. Err.
MU: (identity)    52,69992      4,21822
SIGMA: (identity) 34,75482      2,97897
Xi: (identity)    -0,29363      0,06265
```

7. Jururejo/Mardiasri

```
Response variable: mardisari

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 9,808553 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0,001737021

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      61,40635      4,57276
SIGMA: (identity) 37,22941      3,23954
Xi: (identity)     -0,27921      0,07278
```

8. Ngancar/Papungan

```
Response variable: papungan

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is 7,813146 > 3,841459 1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0,005186754

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      56,57705      4,34034
SIGMA: (identity) 36,01285      2,93606
Xi: (identity)     -0,19223      0,05100
```

9. Paron

```
Response variable: paron

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is  8,668371  >  3,841459  1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is  0,003237805

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      55,27988      4,69238
SIGMA: (identity)  38,08769      3,35647
Xi: (identity)     -0,27581      0,07511
```

10. Widodaren/Walikukun

```
Response variable: walikukun

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject
Gumbel hypothesis.

likelihood ratio statistic is  2,570389  <  3,841459  1 df
chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is  0,108881

Convergence successfull![1] "Convergence successfull!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

                                MLE Stand. Err.
MU: (identity)      59,40595      4,08846
SIGMA: (identity)  34,16979      2,70817
Xi: (identity)     -0,07648      0,03868
```

Lampiran 7 Syntax Program R Estimasi Parameter GEV Spasial

#input data koordinat

```
x<-read.table("D:/thesis/data thesis/koordinat.txt",
header=T)

x<-as.matrix(x)

loc=x

colnames(loc)<-c("lat", "lon")
```

#input data block maxima periode tiga bulan

```
b1<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/gemarang.txt", header=T))

b2<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data thesis/guyung.txt",
header=T))

b3<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/karangjati.txt", header=T))

b4<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data thesis/kedung
bendo.txt", header=T))

b5<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/mantingan.txt", header=T))

b6<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data thesis/kricak.txt",
header=T))

b7<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/mardisari.txt", header=T))

b8<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/papungan.txt", header=T))

b9<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data thesis/paron.txt",
header=T))

b10<-as.matrix(read.table("D:/thesis/data
thesis/walikukun.txt", header=T))

B=matrix(c(b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10),ncol=10)

colnames(B)=c("gemarang","guyung","karang jati","kedung
bendo","mantingan","kricak","mardisari","papungan","paron","
walikukun")
```

#uji kesesuaian distribusi GEV

```
#ujianderson daling

F1= F.GEV(b1, 57.18313,37.7988,-0.29803)
A1=A2(sort(F.GEV(b1, 57.18313,37.7988,-0.29803)))
AD1=A2_GOFlaio(b1, dist="GEV")

F2= F.GEV(b2, 66.26428,40.65674,-0.56425 )
A2=A2(sort(F.GEV(b2, 66.26428,40.65674,-0.56425 )))
AD2=A2_GOFlaio(b2, dist="GEV")

F3= F.GEV(b3, 55.92332,39.07293,-0.18936)
A3=A2(sort(F.GEV(b3, 55.92332,39.07293,-0.18936)))
AD3=A2_GOFlaio(b3, dist="GEV")

F4= F.GEV(b4, 43.56881,34.88528,-0.29744 )
A4=A2(sort(F.GEV(b4, 43.56881,34.88528,-0.29744 )))
AD4=A2_GOFlaio(b4, dist="GEV")

F5= F.GEV(b5, 49.74721,39.92963,-0.08555)
A5=A2(sort(F.GEV(b5, 49.74721,39.92963,-0.08555)))
AD5=A2_GOFlaio(b5, dist="GEV")

F6= F.GEV(b6, 52.69992,34.75482,-0.29363)
A6=A2(sort(F.GEV(b6, 52.69992,34.75482,-0.29363)))
AD6=A2_GOFlaio(b6, dist="GEV")

F7= F.GEV(b7, 61.40635,37.22941,-0.27921)
A7=A2(sort(F.GEV(b7, 61.40635,37.22941,-0.27921)))
AD7=A2_GOFlaio(b7, dist="GEV")

F8= F.GEV(b8, 56.57705,36.01285,-0.19223 )
A8=A2(sort(F.GEV(b8, 56.57705,36.01285,-0.19223)))
AD8=A2_GOFlaio(b8, dist="GEV")

F9= F.GEV(b9, 55.27988,38.08769,-0.27581 )
A9=A2(sort(F.GEV(b9, 55.27988,38.08769,-0.27581 )))
AD9=A2_GOFlaio(b9, dist="GEV")

F10= F.GEV(b10, 59.40595,34.16979,-0.07648 )
A10=A2(sort(F.GEV(b10, 59.40595,34.16979,-0.07648)))
AD10=A2_GOFlaio(b10, dist="GEV")

AD=matrix(c(AD1,AD2,AD3,AD4,AD5,AD6,AD7,AD8,AD9,AD10),ncol=10)
AD
```

```
#Transformasi ke Frechet
```

```
z1 <- gev2frech(b1, 57.18313,37.7988,-0.29803 )
z2<- gev2frech(b2, 66.26428,40.65674,-0.56425 )
z3 <- gev2frech(b3, 55.92332,39.07293,-0.18936 )
z4 <- gev2frech(b4, 43.56881,34.88528,-0.29744 )
z5 <- gev2frech(b5, 55.74868,35.3038,-0.07952 )
z6 <- gev2frech(b6, 52.69992,34.75482,-0.29363 )
z7 <- gev2frech(b7, 61.40635,37.22941,-0.27921 )
z8<- gev2frech(b8, 56.57705,36.01285,-0.19223 )
z9 <- gev2frech(b9, 55.27988,38.08769,-0.27581 )
z10 <- gev2frech(b10, 59.40595,34.16979,-0.07648 )
```

```
#extremal coefficient
```

```
#extremal coefficient
fitextcoeff(Z, loc, estim = "ST") #model Smith
fitextcoeff(Z, loc, estim = "Smith") #model Schlather
#grafik extremal coefficient
par(mfrow=c(2,2))
madogram(Z,loc,which="ext",col="grey")
madogram(Z,loc,which="mado",col="grey")
fmadogram(Z,loc,which="ext",col="grey")
fmadogram(Z,loc,which="mado",col="grey")
```

```
#seleksi model
```

```
loc.form<-z~lon+lat
scale.form<-z~lon+lat
shape.form<-z~1
H1<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lon
scale.form<-z~lon+lat
shape.form<-z~1
H2<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lon+lat
scale.form<-z~lon
shape.form<-z~1
H3<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lon
scale.form<-z~lon
shape.form<-z~1
H4<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lat
scale.form<-z~lon+lat
shape.form<-z~1
H5<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lon+lat
scale.form<-z~lat
shape.form<-z~1
H6<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lat
scale.form<-z~lat
shape.form<-z~1
H7<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lon
scale.form<-z~lat
shape.form<-z~1
H8<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-z~lat
scale.form<-z~lon
shape.form<-z~1
H9<-fitspatgev(Z, scale(loc), loc.form, scale.form, shape.form)

TIC(H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9)
```

#estimasi parameter Max-Stable

```
loc.form<-z~lon
scale.form<-z~lon
shape.form<-z~1

#pemodelan brown resnick
brown <-fitmaxstab(Z, loc, loc.form, scale.form,
shape.form,cov.mod="brown",iso=TRUE,method="Nelder")

brown

#pemodelan smith
smith <-fitmaxstab(Z, loc, loc.form, scale.form,
shape.form,cov.mod="gauss",iso=TRUE,method="Nelder")

smith

#pemodelan schlather
schlather<-fitmaxstab(Z, loc, loc.form, scale.form,
shape.form,cov.mod="bessel",iso=TRUE,method="Nelder")

schlather
```

#return level untuk 2,4,8 dan 10 tahun kedepan

```
s1=predict(smith, loc, ret.per=8)
s2=predict(smith, loc, ret.per=16)
s3=predict(smith, loc, ret.per=32)
s4=predict(smith, loc, ret.per=40)

ST1=predict(schlather, loc, ret.per=8)
ST2=predict(schlather, loc, ret.per=16)
ST3=predict(schlather, loc, ret.per=32)
ST4=predict(schlather, loc, ret.per=40)

br1=predict(brown, loc, ret.per=8)
br2=predict(brown, loc, ret.per=16)
br3=predict(brown, loc, ret.per=32)
br4=predict(brown, loc, ret.per=40)
```


Lampiran 8 Jarak *Euclid* dan Koefisien Ekstremal

Smith			Smith		
No	euclid	ext.coeff	No	euclid	ext.coeff
1	0,1181	1,6932	24	0,397	1,4682
2	0,2552	1,4801	25	0,3981	1,5256
3	0,1769	1,516	26	0,1985	1,4831
4	0,2317	1,4574	27	0,143	1,3601
5	0,0218	1,4062	28	0,1734	1,3942
6	0,0508	1,4042	29	0,1553	1,4915
7	0,0135	1,3087	30	0,3195	1,4666
8	0,0505	1,5575	31	0,2141	1,4286
9	0,1432	1,5138	32	0,2552	1,4363
10	0,2074	1,6222	33	0,2412	1,4573
11	0,1778	1,5233	34	0,2428	1,5172
12	0,2464	1,6599	35	0,1383	1,3831
13	0,1295	1,6423	36	0,07	1,3836
14	0,0779	1,5818	37	0,0274	1,3966
15	0,1292	1,5228	38	0,0669	1,4737
16	0,0702	1,637	39	0,1215	1,5253
17	0,2228	1,5997	40	0,0577	1,3863
18	0,102	1,2965	41	0,0136	1,2649
19	0,4516	1,5595	42	0,1875	1,4453
20	0,2767	1,4429	43	0,06	1,4594
21	0,2098	1,4331	44	0,1461	1,4723
22	0,2556	1,4265	45	0,1802	1,4657
23	0,2185	1,5823			

Schlather			Schlather		
No	euclid	ext,coeff	No	euclid	ext,coeff
1	0,1181	1,6293	24	0,397	1,4142
2	0,2552	1,4202	25	0,3981	1,4697
3	0,1769	1,458	26	0,1985	1,4262
4	0,2317	1,4081	27	0,143	1,3105
5	0,0218	1,3569	28	0,1734	1,3401
6	0,0508	1,3579	29	0,1553	1,4353
7	0,0135	1,2628	30	0,3195	1,4154
8	0,0505	1,5029	31	0,2141	1,3798
9	0,1432	1,4639	32	0,2552	1,391
10	0,2074	1,5532	33	0,2412	1,4077
11	0,1778	1,461	34	0,2428	1,4656
12	0,2464	1,5987	35	0,1383	1,3397
13	0,1295	1,5793	36	0,07	1,3382
14	0,0779	1,525	37	0,0274	1,3477
15	0,1292	1,4646	38	0,0669	1,4221
16	0,0702	1,5742	39	0,1215	1,4755
17	0,2228	1,5423	40	0,0577	1,3409
18	0,102	1,2408	41	0,0136	1,2219
19	0,4516	1,5	42	0,1875	1,4018
20	0,2767	1,3853	43	0,06	1,4084
21	0,2098	1,3801	44	0,1461	1,4241
22	0,2556	1,3683	45	0,1802	1,4179
23	0,2185	1,5203			

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, terdapat beberapa kesimpulan diantaranya :

1. Prosedur pemodelan MSP diawali dengan transformasi data ekstrem ke dalam distribusi Frechet untuk menghitung koefisien ekstremal dan estimasi parameter model dependensi spasial. Selanjutnya mendapatkan model *trend surface* terbaik untuk estimasi parameter GEV Spasial model *Smith*, *Schlather* dan *Brown Resnick* dengan kriteria pemodelan terbaik melalui nilai TIC terkecil. Estimasi parameter melalui *Pairwise Likelihood*, diawali dengan PDF dari masing-masing model disubstitusikan ke dalam fungsi *Pairwise Likelihood* dan menghasilkan persamaan yang tidak *closed form*. Kemudian digunakan metode numerik *Nelder-Mead* untuk menyelesaikan persamaan tersebut.
2. Estimasi parameter secara univariat menunjukkan bahwa data curah hujan ekstrem di Ngawi telah berdistribusi GEV dengan tipe distribusi Weibull. GEV spasial dengan model *Smith*, *Schlather* dan *Brown Resnick* menghasilkan nilai estimasi parameter yang hampir sama untuk parameter *shape* bernilai positif.
3. *Return level* atau curah hujan tertinggi diduga dengan periode ulang 2, 4, 8 dan 10 tahun. *Return level* diperoleh berdasarkan parameter *location*, *scale*, dan *shape* yang telah diestimasi pada masing-masing lokasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa curah hujan tertinggi terus meningkat dari tahun ke tahun. Berdasarkan kriteria RMSE, model *Smith* lebih akurat dari pada model *Schlather* dan *Brown-Resnick* dalam menduga *return level*.

5.2 Saran

Perlu dilakukan penelitian lebih lanjut dimana dependensi temporal juga ikut diperhitungkan, menjadi *space-time max stable processes*. Perhitungan *return level* tidak hanya mengestimasi besar nilai ekstrem namun juga dapat memperkirakan waktu terjadinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anifah, U. 2014. *Pemilihan Threshold Pada Pemodelan Nilai Ekstrem Curah Hujan di Sentra Produksi Padi Jawa Timur Dengan MRLP-Baru (New Technique For Mean Residual Life Plot)*. Tugas Akhir Sarjana. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.Surabaya.
- Anindita, R. 2015. *Pemodelan Spatial Extreme Value Dengan Max Stable Process Berdasarkan Model Smith (Studi Kasus :Pemodelan Curah Hujan Ekstrem Di Kabupaten Lamongan)*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Blanchet, J., dan Davison, A.C. 2011. *Spatial Modeling of Extreme Snow Depth*. The Annals of Applied Statistics vol.5 no.3 1699-1725.
- BMKG. 2015. *Prakiraan Musim Hujan 2015/2016 di Indonesia*. Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika. Jakarta.
- BPS. 2015. Berita Resmi Statistik : *Produksi Padi Dan Palawija 2014*. Badan Pusat Statistik Jawa Timur.
- Brown, B.M., S.I. Resnick. 1977. *Extreme values of independent stochastic processes*. Journal of Applied Probability. 14(4):732-739
- Buishand, T. A., de Haan, L., Zhou, C. 2008. On spatial extreme: *With application to a rainfall problem*. Ann. Appl. Stat. 2, 2, 624-642.
- Cooley, D., Douglas N., & Philippe N. 2007. *Bayesian Spatial Modeling of Extreme Precipitation Return Levels*. Journal of the American Statistical Association. 102(479) : 824-840
- Cooley D, Naveau P, Poncet P. 2006. *Variograms for Spatial Max-Stable Random Fields. Lecture Notes in Statistics*. 187: 373-390, Springer, New York.
- Coles, S . 2001. *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Value*. London: Springer –Verlag.
- Cressie, N. 1991. *Statistics for Spatial data*. New York: Wiley.
- Davis, R.A., C. Kluppelberg, & C. Steinkohl. 2013. *Max-stable processes for modeling extremes observed in space and time*. Journal of the Korean Statistical Society. 42: 399-414.
- Davison, A.C., Gholamrezaee, M.M. 2010. *Geostatistics of extremes*. Unpublished manuscript.
- Davison, A.C., A.S. Padoan, & M. Ribatet. 2012. *Statistical modeling of spatial extremes*. Statistical Science. 27(2):161-186.

- De Haan, L. 1984. *A spectral representation for max-stable processes*. The Annals of Probability. 12(4) : 1194-1204
- Finkenstadt, B., Rootzen, H. 2004. *Extreme Value in Finance , Telecommunication and the Enviroment*. New York: Chapman & Hall/CRC
- Gilli, M., Kellezi, E. 2006. *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Risk*. Computational Economics. 27(1): 1-23.
- Hafid, H., Anisa, Anna I. 2015. *Interval Kepercayaan Skewness dan Kurtosis Menggunakan Bootstrap pada Data Kekuatan Gempa Bumi*. Universitas Hasanudin.
- Jeon S, Smith RL. 2012. *Dependence Structure of Spatial Extremes Using Threshold Approach*. <http://arxiv.org/abs/1209.634v14>
- Kabluchko, Z. 2009. *Extremes of space-time Gaussian processes*. Stochastic Processes and Their Applications. 119:3962-3980.
- Kabluchko, Z., Schalater, M., de Haan, L. 2009. *Stationary max-stable fields associated to negative definite function*. Ann. Probab. 2>1 2042-2065.
- Kadarsah. 2007. *Tiga Pola Curah Hujan Indonesia*. <https://kadarsah.wordpress.com/2007/06/29/tiga-daerah-iklim-indonesia/#comment-2613>.
- Kotz, S., Nadarajah, S., 2000. *Extreme Value Distribution: Theory and Applications*. London: Imperial College Press.
- Malika, R. 2015. *Spatial Extreme Modeling Pada Data Curah Hujan Ekstrem dengan Pendekatan Proses Max-Stable Model Schlather (Studi Kasus: Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Mallor, Nualart, & Omey. 2009. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Value Application to Calculate extreme wind speeds*. Hogeschool Universiteit Brussel.
- McNeil, A.J. 2015. *Extreme Value Theory for Risk Managers*. Zurich: Departmen of Maxima in Space. Biometrika, 96, 1-17.
- Nadarajah, S. & D. Choi. 2007. *Maximum daily rainfall in South Korea*. Journal of Earth System Science. 116(4):311-320.
- Nelder, J.A., & R. Mead. 1965. *A simplex method for function minimization*. National Vegetable Research Station, Wellesbourne.

- Padoan, S.A, M. Ribatet, S.A. Sisson. 2010. *Likelihood Based Inference for Max-Stable Processes*. Journal of the American Statistical Association. 105(489) : 263-277.
- Ramadani, I. 2015. *Spatial Extreme Value Modeling Dengan Max Stable Processes Model Smith Dan Brown-Resnick* (Studi Kasus : Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan). Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Radar madiun. 2016. *Bencana Intai Ngawi hingga April*. <http://radarmadiun.co.id/detail-berita-1306-bencana-intai-ngawi-hingga-april.html> (diakses pada tanggal 8 April 2016).
- Ribatet, M. 2011. *An Introduction to Max-Stable Processes*. Institut de Mathematiques et de Modelisation de Montpellier.
- Sari, F.M. 2013. *Prediksi Curah Hujan Ekstrem Secara Spasial* (Studi Kasus: curah Hujan Bulanan Di Kabupaten Indramayu). Institut Pertanian Bogor
- Schlather, M. & Tawn, J. 2003. *A dependence measure for multivariate and spatial extremes: Properties and inference*. Biometrika. 90(1):139–156.
- Schlather, M. 2002. *Models for stationary max-stable random fields*. Extremes. 5(1) : 33-44.
- Shin, H., Y. Jung., C. Jeong & Heo, Jun-Haeng. 2011. *Assessment of modified Anderson–Darling test statistics for the generalized extreme value and generalized logistic distributions*. Springer-Verlag.
- Smith, R.L. 1990. *Max-stable processes and spatial extremes*. University of Surrey. England.
- Omey, E., F. Mallor., E. Nualart. 2009. *An introduction to statistical modeling of extreme values Application to calculate extreme wind speeds*. Pamplona.
- Webster R, Oliver MA. 2007. *Geostatistics for Environmental Scientist*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.

BIOGRAFI PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Arief Rachman Hakim, lahir di Mujirahayu Lampung Tengah tanggal 30 Juli 1993, dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis menyelesaikan pendidikan formal yaitu di SD Negeri 3 Mujirahayu hingga lulus tahun 2005. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMPN 2 Way Pengubuan, Kab. Lampung Tengah lulus tahun 2008, dan menempuh jenjang pendidikan SMA selama dua tahun melalui program akselerasi di SMAN 1 Terbanggi Besar lulus tahun 2010. Penulis meraih gelar Sarjana Sains dari Jurusan Statistika Universitas Diponegoro Semarang pada tahun 2014. Pada tahun 2014, Penulis selanjutnya pendidikan ke jenjang S2 di Jurusan Statistika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Kritik dan saran dapat di tunjukkan langsung ke penulis melalui email arief30juli@gmail.com.